MATHEMATIK NEUE WEGE

ÜBUNGSMATERIALIEN

LINEARE ALGEBRA / ANALYTISCHE GEOMETRIE

Herausgegeben von

Henning Körner
Arno Lergenmüller
Günter Schmidt
Martin Zacharias

Schroedel

MATHEMATIK NEUE WEGE
Übungsmaterialien
Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Bearbeitet von

Michael Bostelmann, Dieter Eichhorn, Andreas Jacob, Dr. Eberhard Lehmann, Martin Müller, Hendrik Nobis, Annelies Paulitsch, Elke Renwanz, Prof. Günter Schmidt, Thomas Vogt, Dr. Hubert Weller, Martin Zacharias

© 2014 Bildungshaus Schulbuchverlage
Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig
www.schroedel.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung gescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.
Auf verschiedenen Seiten dieses Buches befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie bei dem angegebenen Inhalt des Anbieters dieser Seite auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht werden kann.

Druck A^2 / Jahr 2015
Alle Drucke der Serie A sind im Unterricht parallel verwendbar.

Redaktion: Sven Hofmann
Grafiken: technisch-grafische Abteilung Westermann, Braunschweig
Umschlaggestaltung: KLAXGESTALTUNG, Braunschweig
Satz: Satzteam Bleifrei, Hildesheim
Druck und Bindung: westermann druck GmbH, Braunschweig

ISBN 978-3-507-**85586**-1

Inhalt

Vorbemerkungen **4**
Zur Konzeption des Lehrwerks „Mathematik Neue Wege“ 4
Ziele und Konzeption der Übungsmaterialien 6
Verschiedene Kategorien von Übungsblättern 7

Arbeitsblätter – Übersicht **9**

Kopfübungen **12**

Kapitelbezogene Übungen **23**

Grundwissen **141**
Lösungen – Grundwissen 152

Lösungen **162**
Kopfübungen 162
Kapitelbezogene Übungen 167
Entschlüsselungstabelle Grundwissen 260

Fotoverzeichnis **260**

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vorbemerkungen

Die hier vorliegenden Materialien beziehen sich auf den Themenbereich **Lineare Algebra/ Analytische Geometrie,** wie er in den entsprechenden Bänden der Lehrbuchreihe NEUE WEGE (Themenband, Einführungs- und Qualifikationsphase) zu finden ist.

Diese Übungsmaterialien sind Teil eines ergänzenden Medienpakets zu dem Unterrichtswerk NEUE WEGE. Sie sind am Aufbau dieses Lehrwerks orientiert, können aber auch ergänzend zu anderen Lehrwerken eingesetzt werden.

Zur Konzeption des Lehrwerks „Mathematik Neue Wege"

Das Lehrwerk stellt in Konzeption und Gestaltung einen neuen Ansatz eines Schulbuches für den Mathematikunterricht am Gymnasium dar. Es greift in mehrfacher Hinsicht die konstruktiven Ansätze auf, die im Zusammenhang mit der Diskussion um die Allgemeinbildung und die Bildungsstandards im Mathematikunterricht und über die Ergebnisse der TIMS-Studie und PISA in den letzten Jahren entwickelt wurden.

Das Buch ist in thematisch zusammenhängende größere Lernabschnitte gegliedert. Jeder dieser Lernabschnitte wird in drei Ebenen grün – weiß – grün aufgebaut.

In der **1. grünen Ebene** werden **verschiedene Zugänge zum Thema** des Lernabschnitts angeboten. Dies geschieht in Form von aktivitäts- und denkanregenden Aufgaben, welche die unterschiedlichen Interessen und Lerntypen ansprechen. Die alternativ angebotenen Aufgaben zielen auf die aktive Auseinandersetzung mit den Kerninhalten des Lernabschnitts. Sie sind schülerbezogen, situationsgebunden und handlungsauffordernd gestaltet und knüpfen an die Vorerfahrungen der Lernenden an. Sie sind weitgehend offen formuliert und regen zu unterschiedlichen Lösungsansätzen an.

Die weiße Ebene beginnt mit einer kurzen Hinleitung zum zentralen Basiswissen, das im hervorgehobenen **Kasten** festgehalten wird. Dabei konzentriert sich dieses Basiswissen nicht nur auf die Begriffsdefinitionen und Algorithmen, sondern umfasst auch anschauliche Grundvorstellungen, Zusammenhänge, Arbeits- und Denkstrategien. Anschließend wird dieser Inhalt auf vielfältige Weise auf- und durchgearbeitet und gefestigt (→ „Intelligentes Üben"). Die **Übungen** beinhalten neben dem operatorischen Durcharbeiten auch Anwendungen und Vernetzungen, selbstverständlich auch Übungen zum Ausformen von Routinen. Häufig werden Möglichkeiten zur Selbstkontrolle und Tipps zum eigenständigen Lösen angeboten.

Die 2. grüne Ebene ist der **Erweiterung** und **Vertiefung** gewidmet. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist dabei die verstärkte Einbindung der Aufgaben in Kontexte und Anwendungen. Ein zweiter Aspekt zielt auf offenere Unterrichtsformen (Experimente, Gruppenarbeit, kleine Projekte), ein dritter auf passende Anregungen zum Problemlösen (Differenzierung). Die Aufgaben sind auch äußerlich unter solchen Aspekten zusammengefasst. Zusätzlich finden sich hier noch lebendig und anschaulich gestaltete Lesetexte/Informationen.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

„Intelligentes Üben“

Die Forderung zum „intelligenten Üben“ richtet sich in erster Linie gegen eine zu einseitige Ausrichtung an schematischem, schablonenhaftem Einüben von Kalkülen und nacktem Begriffswissen zugunsten eines vielfältigen Übens des Verstehens, des Könnens und des Anwendens. Dies darf nicht bedeuten, dass die Aufgaben überwiegend auf anspruchsvollere Fähigkeiten und komplexere Zusammenhänge zielen. Es müssen hinreichend viele Aufgaben vorhanden sein, die einfaches Können stützen. Deshalb darf auch nicht auf Wiederholungen bei Aufgaben verzichtet werden; auch „Päckchen“ sind dort angebracht, wo sie das Trainieren wichtiger Grundfertigkeiten gewährleisten.

Hier noch einige ergänzende Kriterien zum „intelligenten Üben“:

- Übungen sollen **im Umkreis von Problemen** angesiedelt und durch übergeordnete Aspekte zusammengehalten sein. (Ein solcher Aspekt ist auch „Training“.) Die Probleme sollten an den Interessen und der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler orientiert sein.
- Übungen sollten auch häufig **kleine Entdeckungen** ermöglichen oder das über die Mathematik hinausweisende **Sachwissen vergrößern**.
- Übungen können und sollten auch **produktorientiert** sein. Dies wird in der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie besonders durch den Einsatz der neuen Technologien begünstigt.

Schließlich wird die beschriebene Auffassung des „intelligenten Übens“ ergänzt durch die konsequente Berücksichtigung von Aufgaben:

- für offene und kooperative Unterrichtsformen
- mit fächerverbindenden und fächerübergreifenden Aspekten
- zur gleichmäßigen Förderung von Jungen und Mädchen
- für die Möglichkeit und den Vergleich unterschiedlicher Lösungswege
- für den konstruktiven Umgang mit Fehlern
- für das Bewusstmachen und den Erwerb von Strategien für das eigene Lernen

Das Lehrbuch stellt zusätzlich Elemente bereit, die das „kumulative Lernen“ stützen. Dies wird durch verschiedene Gestaltungselemente erreicht:

- Zunächst werden Wiederholungsaufgaben in Neuerwerbsaufgaben eingebettet.
- Zusätzlich erscheinen Wiederholungen im sogenannten **„Check up“**. Hier gibt es übersichtliche Zusammenfassungen und zusätzliche Trainingsaufgaben, zu denen die Lösungen am Ende des Buches zu finden sind.
- Am Ende jeden Kapitels finden sich komplexere und lernabschnittsübergreifende Aufgaben unter der Überschrift **„Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben“**. Diese sind an den prozessorientierten Kompetenzen orientiert und auf jeweils eigenen Seiten unter den Aspekten *„Training“*, *„Verstehen von Begriffen und Verfahren“*, *„Anwenden und Modellieren“* und *„Kommunizieren und Präsentieren“* eingeordnet. Die Lösungen zu diesen Aufgaben finden sich im Internet unter *www.schroedel.de/nw-85584* unter dem Reiter *Downloads*.
- Dem Aufgreifen und Sichern von früherem Wissen und Fähigkeiten dienen zwei weitere Elemente, die in allen Lernabschnitten auftauchen. Unter **„Kurzer Rückblick“** finden sich kleine Aufgaben, die an Wissen und Fertigkeiten aus der SI erinnern. Das **„Grundwissen“** greift Basiswissen und Basisfertigkeiten aus vorher behandelten Lernabschnitten auf und hält diese somit verfügbar.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

- Am Ende des Buches finden sich **„Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur“**. Diese sind auf typische Kenntnisse und Kompetenzen ausgerichtet, wie sie in allen Bundesländern gefordert werden. Auch hierzu findet man die Lösungen im Internet unter *www.schroedel.de/nw-85584* unter dem Reiter *Downloads*.

Das Buch wird eingebettet in eine integrierte Lernumgebung.

- In vielen Aufgaben und Projekten des Buches finden sich Aufforderungen und Anregungen zur **Nutzung der „elektronischen Werkzeuge“** Grafischer Taschenrechner (GTR), Tabellenkalkulation (TK), Dynamische Geometriesoftware (DGS) und des Internets.
- Dem Buch liegt eine **interaktive CD** bei, die sehr nutzerfreundliche Werkzeuge bereitstellt, die auf die objektorientierte Konzeption der Analytischen Geometrie ausgerichtet sind. Die CD kann generell zur Unterstützung des Lernens herangezogen werden, bei manchen Aufgaben wird durch das CD-Symbol auf die Nutzung eines speziellen Werkzeugs hingewiesen.
- Bei vielen Aufgaben und Projekten werden **spezielle Dateien** zur Unterstützung der Anschauung und zur Lösungsstrategie angeboten.

  Diese sind mit dem Maussymbol und dem Dateinamen gekennzeichnet.

  Auf sie kann über das Internet unter *www.schroedel.de/nw-85584* zugegriffen werden.

Ziele und Konzeption der Übungsmaterialien

Die Übungsmaterialien konzentrieren sich auf bestimmte Teilaspekte des Lehrwerks. Sie unterstützen insbesondere die in dem Lehrwerk bereits konsequent berücksichtigten Anliegen

- des Aufbaus grundlegender mathematischer Basisfähigkeiten
- und des kontinuierlichen Sicherns des dazugehörigen Basiswissens.

Sie bieten damit eine weitere Hilfe für die Realisierung des kumulativen Lernens in der täglichen Unterrichtspraxis, das eine wesentliche Grundlage für die vielfältigen anspruchsvollen Ziele in den Aufgaben und Aktivitäten des Lehrwerks darstellt.

Die Übungsmaterialien sind nach den gleichen bewährten Prinzipien des abwechslungsreichen und intelligenten Übens wie im Lehrwerk aufgebaut.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Verschiedene Kategorien von Übungsblättern

Die Materialien enthalten kopierfähige Übungsblätter verschiedener Kategorien.

Kopfübungen

Diese Übungsblätter dienen zum Wiederholen und Auffrischen erworbener Kenntnisse aus der Sekundarstufe 1. Die dazugehörigen Lösungsstreifen am Ende der Übungsmaterialien ermöglichen den Schülerinnen und Schülern je nach Arbeitsform eine zügige Selbstkontrolle.

Kapitelbezogene Übungen

Die Übungsblätter sind thematisch nach den Kapiteln und Lernabschnitten der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie angeordnet. Zusätzlich gibt es Übungsblätter als Komplexe Aufgaben zur Analytischen Geometrie, die sich übergreifend auf mehrere Kapitel der Analytischen Geometrie beziehen. Entsprechend der Zielkonzeption sind nicht alle Lernabschnitte mit der gleichen Anzahl von Übungsblättern berücksichtigt, eine Konzentration erfolgt bei den trainingsintensiven Kapiteln zu den grundlegenden Routinen und Basisfähigkeiten. Jeder Themenbereich der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie ist jeweils in verschiedene Kategorien unterteilt. Alle Übungsblätter sind zur schnellen Orientierung mit thematischen Überschriften und mit der zugehörigen Bezeichnung der Kategorie versehen. Auf den Seiten 9 bis 11 wird dies in einer detaillierten Inhaltsübersicht mit Seitenangabe zusammengefasst.

Übersicht Zu jedem Themenbereich wird am Anfang auf einem Übungsblatt eine kurze Zusammenfassung der Begriffe und Inhalte angeboten. Diese kann zur Sicherung gerade erworbenen Wissens und Könnens in einem Teilbereich, zur Wiederholung des Wissens und Könnens nach Abschluss eines größeren Bereichs oder zur Selbstdiagnose beim Einstieg in einen neuen Bereich genutzt werden.

Trainieren Diese Übungsblätter bieten abwechslungsreiche, kleine Trainingsaufgaben, die im Schwerpunkt zur Sicherung spezieller Fähigkeiten und zur Ausbildung grundlegender Routinen dienen.

Verstehen Diese Übungsblätter sind auf das Sichern und Vertiefen des Begriffsverständnisses (Grundvorstellungen) und des Erkennens und Erläuterns von Zusammenhängen ausgerichtet.

Anwenden Diese Übungsblätter enthalten Aufgaben in kleineren oder größeren Anwendungssituationen, bei denen insbesondere auch die Fähigkeiten zum Modellieren weiterentwickelt werden.

Check up Als zusammenfassende Übungsblätter können sie zur Wiederholung oder selbstständigen Vorbereitung vor Klassenarbeiten genutzt werden. Sie ergänzen die im Buch angebotenen „Check up"-Seiten.

Kapiteltest Diese Übungsblätter beinhalten eine in der Praxis erprobte Zusammenstellung von Aufgaben, die von Lehrenden zum Aufbau von Kursarbeiten genutzt werden können. Für die Lernenden können sie als Standortbestimmung und zusätzliches Training vor Klassenarbeiten dienen.
Die Zusammenstellung der Testaufgaben spiegelt die Vielfalt der im Unterricht angesprochenen Kompetenzen wider und vermeidet eine zu einseitige Betonung von Algorithmen und schematischen Lösungsverfahren.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Am Ende der Übungsmaterialien werden die Lösungen angeboten. Diese können an die Schülerinnen und Schüler je nach Arbeitsform zur Selbstkontrolle ausgegeben werden.

Grundwissen

Die Aufgaben auf den Karteikarten beziehen sich auf grundlegende Begriffe, Verfahren und Anwendungen aus dem Bereich der Linearen Algebra / Analytischen Geometrie. Zu den Karteikarten, die sich auf einer Seite befinden, gibt es die entsprechende Lösungsseite (jeweils 10 Seiten dahinter). Die Anordnung der Lösungskarten ist dabei beliebig gewählt. Im Lösungsteil auf Seite 260 befindet sich die passende Entschlüsselungstabelle.

Die Karteikarten können unter anderem eingesetzt werden:

- zur Sicherung gerade erworbenen Wissens und Könnens in einem Teilbereich
- zur Wiederholung des Wissens und Könnens nach Abschluss eines größeren Bereichs
- zur Selbstdiagnose beim Einstieg in einen neuen Bereich

Die Form der Übungsblätter begünstigt das Anlegen eines entsprechenden Karteikastens.

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Arbeitsblätter – Übersicht

Orientieren und Bewegen im Raum **23**

Übersicht 24

Trainieren **25**

Würfel im Koordinatensystem 1 25; Würfel im Koordinatensystem 2 26;
Würfel im Koordinatensystem 3 27; Streckenzüge 1 28; Streckenzüge 2 29

Verstehen **30**

Descartes Lexikon 30; Vektoren 31; Multiple Choice 32

Anwenden **33**

Schach mal anders 33; Punktspiegelung und zentrische Streckung 34;
Begründen mit Vektoren 35

Check up 36

Kapiteltest 37

Geraden und Ebenen **39**

Übersicht 40

Trainieren **41**

Doppelpyramide 41; Quader 42; Dreiecke 43; Steckbriefe 44;
Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Geraden per Hand 45;
Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Ebenen per Hand 46;
Ebenen und Geraden 47; Oktaeder 48; Allerlei zu Geraden und Ebenen 49;
Geradenscharen 50

Verstehen **51**

Geraden im Einheitswürfel 51; Punktmengen und Spurpunkte 52; Vierecke 53;
Schnittmengen 54; Multiple Choice 55

Anwenden **56**

Würfelschnitte 56; Kunsthalle 57; Schatten eines Denkmals 58

Check up 59

Kapiteltest 61

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Skalarprodukt und Messen **67**

Übersicht 68

Trainieren **69**

Skalarprodukt 69; Winkel 70; Abstände 71; Würfelschnitte 72; Geradenscharen 73; Ebenenscharen 74

Verstehen **75**

Multiple Choice 75; Skalarprodukt 76; Winkel 77; Abstände 78

Anwenden **79**

Geometrische Objekte 79; Vermischte Aufgaben 80; Motorflugzeug 81; Der schief gestellte Würfel im Raum 82; Würfelschnitte 83; Kurven im Raum 84

Check up 85

Kapiteltest 87

Kreise und Kugeln **93**

Übersicht 94

Trainieren **95**

Kreis- und Kugelgleichungen 95; Kreise, Kugeln und Geraden 96; Kugeln und Ebenen 97

Verstehen **98**

Verschiedenes zu Kreisen und Kugeln 98; Multiple Choice 99

Anwenden **100**

Wetterballone 100; Globus und Bewegungsmelder 101

Check up 102

Kapiteltest 103

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Komplexe Aufgaben zur Analytischen Geometrie **105**

Trainieren / Verstehen / Anwenden **106**

Knickpyramide 106; Walmdachhaus 107; Spat 108; Kristallspat 109;
Sendemast 110; Oberlichter 111; Messehalle 112;
Quadratische Pyramide 113; Geradenscharen 114

Matrizen **115**

Übersicht 116

Trainieren **117**

Materialverflechtung – Vom Graphen zur Matrix 117; Produktionen 118;
Produktionsprozesse 119; Kostenkalkulation 120; Prozesse im Alltag 121;
Graphen –Tabellen – Entwicklungen 122; Vermischtes 123;
Projektionen 124; Spiegelungen 125

Verstehen **126**

Multiple Choice 126; Rund um Matrizen 127; Mäuselabyrinth 128

Anwenden **129**

Dürermatrix 129; Fibonacci 130; Salatteller 131;
Verlauf einer Krankheit 132; Mitgliederentwicklung im Tennisclub 133;
Insektenpopulation 134; Bäckereien 135; Verkettung von Abbildungen 136;
Additionstheoreme mit Abbildungsgeometrie 137

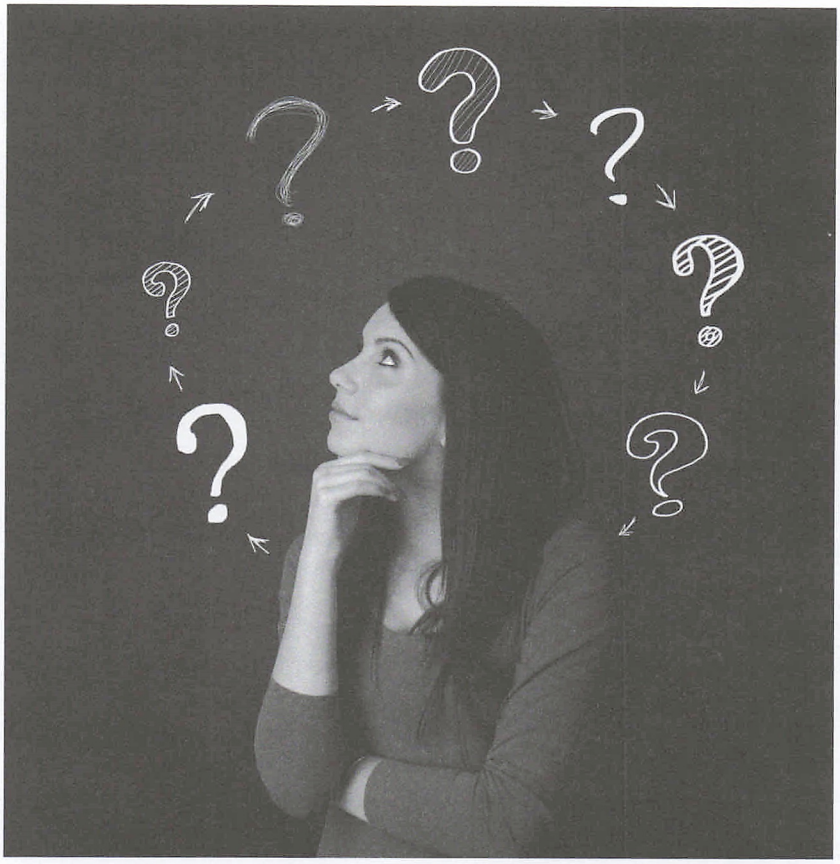
Check up 138

Kapiteltest 139

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kopfübungen



© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

1	Aufgabe	Lösung
1	Zwischen welchen beiden natürlichen Zahlen liegt $\sqrt{5}$?	
2	Schätzen Sie das Volumen einer Litfaßsäule.	
3	Gibt es eine lineare Funktion, die an der Stelle 2 zugleich die Funktionswerte 3 und 4 annimmt?	
4	Klammern Sie so weit wie möglich aus: $18xy - 9x + 24x^2 =$ ■	
5	Welche Werte kann die Wahrscheinlichkeit p eines beliebigen Ereignisses annehmen?	

2	Aufgabe	Lösung
1	Kürzen Sie so weit wie möglich: a) $\frac{7}{49}$ b) $\frac{6}{32}$	
2	Bei einem Quadrat verdoppelt man jede Seitenlänge. Wie verändert sich der Flächeninhalt?	
3	An welcher Stelle nimmt die Funktion $y = 3x^2 - 2$ den Wert 1 an?	
4	Lesen Sie die Lösung ab: $(x+2)\cdot(x-\sqrt{5}) = 0$	
5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem dreimaligen Münzwurf genau die Reihenfolge ZZK wirft?	

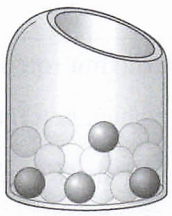
ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

3	Aufgabe	Lösung
1	a) Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert 256? b) Berechnen Sie: $-1 + 2 : (1{,}5 - (-0{,}5))$	
2	Zeichnen Sie eine Figur mit dem Flächeninhalt 2ab.	
3	Geben Sie die Funktionsgleichungen einer Geraden und einer Parabel an, die beide durch den Punkt (2|2) laufen.	
4	Lösen Sie die Klammer auf: $(a^3 - b^4)^2 =$ ■	
5	Es wurde 120-mal mit einem unregelmäßigen Würfel gewürfelt. Folgende Häufigkeitsverteilung ergab sich: 1: 9 | 2: 21 | 3: 30 | 4: 30 | 5: 19 | 6: 11 Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für P(2).	

4	Aufgabe	Lösung
1	Begründen Sie mit einem Beispiel, dass die folgenden Aussagen falsch sind: a) Alle Wurzeln sind irrationale Zahlen. b) Ein Bruch kann keine ganze Zahl sein.	
2	Bestimmen Sie das Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Seitenlänge 10 cm und der Höhe 3 cm.	
3	Gegeben ist die Funktionsgleichung $g(x) = x(1 - x)$. Zu welcher Funktionenklasse gehört g?	
4	Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $x(x + x + x + x^2) =$ ■	
5	Bei einem Würfelspiel ist 5-mal hintereinander keine 6 gewürfelt worden. Jetzt sind Sie an der Reihe und sollen würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie jetzt eine 6 würfeln?	

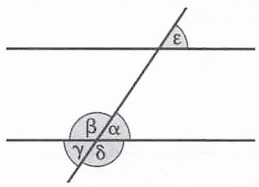
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

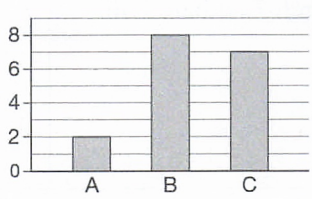
5	Aufgabe	Lösung
1	Ordnen Sie der Größe nach: $\sqrt{17}$ 3,45 3,47 $\sqrt{10}$ 4	
2	Bestimmen Sie den Abstand der Punkte P = (2|1) und Q = (5|6).	
3	Geben Sie eine zur Geraden g mit $g(x) = 2x + 1$ senkrechte Gerade an, die den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse besitzt.	
4	Vereinfachen Sie den folgenden Term: $4a^{10} \cdot (-6a^{-4}) =$	
5	Wie viele Kugeln müssen noch schwarz gefärbt werden, damit beim Ziehen einer Kugel gilt: P(schwarz) = 75 %? 	

6	Aufgabe	Lösung
1	Vereinfachen Sie: a) $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} =$ b) $\frac{a-b}{c} - \frac{-b}{c} =$	
2	Ein Würfel hat ein Volumen von 1 m^3. Geben Sie die Maße einer quadratischen Pyramide an, die das gleiche Volumen besitzt.	
3	Eine Gerade besitzt die Nullstelle $x = 0{,}5$ und geht durch den Punkt P = (1|1). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden.	
4	Lösen Sie: $x^2 + x = 0$	
5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto (49 Zahlen) im ersten Zug eine durch 7 teilbare Zahl zu erhalten?	

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

7	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $\frac{2}{3} - 1\frac{4}{9} =$ ■	
2	$\alpha = 70°$. Berechnen Sie die übrigen Winkel. 	
3	Geben Sie ein Beispiel an für einen: a) antiproportionalen Zusammenhang, b) proportionalen Zusammenhang.	
4	Lösen Sie: a) $x^2 - 81 = 0$ b) $x^2 + 10 = -54$	
5	Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit roten und blauen Kugeln, eine rote Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{1}{3}$. Geben Sie zwei mögliche Verteilungen der Kugeln in der Urne an.	

8	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: a) $5\sqrt{5} \cdot 0{,}2 =$ ■ b) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-(-1)) =$ ■	
2	Von einem Kreis werden 20 % in Form eines Kreisausschnittes markiert. Berechnen Sie den Winkel dieses Kreisausschnittes.	
3	Gibt es eine lineare Funktion, deren Graph keine Nullstellen besitzt? Falls ja, geben Sie eine Funktionsgleichung an.	
4	Lösen Sie: $x^2 + 2x + 1 = 0$	
5	Man benötigt mindestens 50 % der Stimmen, um zu gewinnen. Wer hat gewonnen? 	

ISBN: 978-3-507-85583-0

© 2013 Schroedel, Braunschweig

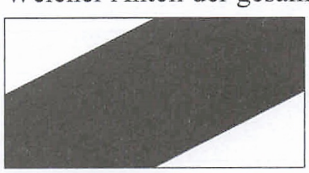
9	Aufgabe	Lösung
1	Setzen Sie das richtige Zeichen zwischen die beiden Zahlen (<, >, =). a) $\sqrt{9}$ ■ $\frac{5}{2}$ b) $\sqrt{5}$ ■ $\sqrt{3 \cdot 2}$	
2	Geben Sie mögliche Seitenlängen eines Quaders mit dem Volumen 600 cm^3 an.	
3	Ist jede lineare Zuordnung eine proportionale Zuordnung?	
4	Vereinfachen Sie so weit wie möglich: $\sqrt{4^2 - 2^2} =$ ■	
5	Wie bestimmt man den Zentralwert?	

10	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $\sqrt{6^2 + 8^2} =$ ■	
2	Was passiert mit dem Flächeninhalt eines Kreises, wenn man den Radius verdreifacht?	
3	Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung $y = 2(x - 1) \cdot (x + 1)$. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt.	
4	Vereinfachen Sie: $\frac{(3r)^4}{(9r^2)^2} =$ ■	
5	Welches Ereignis hat die größere Wahrscheinlichkeit: Bei einem zweimaligen Münzwurf zweimal „Kopf“ zu werfen oder bei einem einfachen Würfelwurf eine 5 oder 6 zu erhalten?	

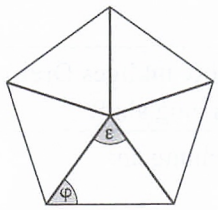
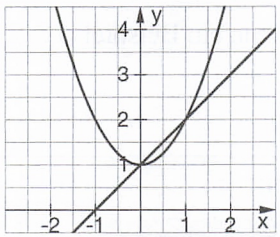
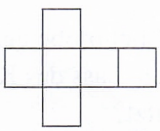
ISBN: 978-3-507-85586-1

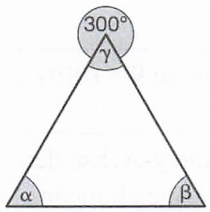
© 2014 Schroedel, Braunschweig

11	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: a) $0{,}7^2 =$ ■ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$ ■	
2	Ein Kreis mit dem Flächeninhalt $10\,cm^2$ wird mit dem Streckfaktor $k = 0{,}2$ gestreckt. Bestimmen Sie den neuen Flächeninhalt.	
3	Geben Sie die Funktionsgleichung einer Parabel an, welche den Scheitelpunkt $S = (2\,|\,1)$ besitzt und mit dem Faktor 2,5 gestreckt wurde.	
4	Lösen Sie: $4x^2 + 3 = 4$	
5	Sie haben mit einer Münze bereits 3-mal hintereinander „Kopf“ geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie im jetzt folgenden Wurf wieder „Kopf“ werfen?	

12	Aufgabe	Lösung
1	a) Nennen Sie die Quadratzahl von 13. b) Berechnen Sie: $(-1) + 1 \cdot (-1) =$ ■	
2	Welcher Anteil der gesamten Fläche ist dunkel? 	
3	Ergänzen Sie die Tabelle und geben Sie eine Funktionsgleichung an, welche die Tabelle beschreibt. x: –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 y: –8 | –1 | 0 | 1 | 8 | ■ | ■	
4	Geben Sie die Lösungsmenge an: a) $x^3 = 125$ b) $x^3 = -27$	
5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem zweimaligen Würfelwurf die Augensumme echt kleiner als 4 ist?	

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

13	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $(-1)\cdot(-2) : (-1) =$ ■	
2	Hier sehen Sie ein regelmäßiges Fünfeck. Bestimmen Sie die gesuchten Winkel. 	
3	Geben Sie eine Gleichung an, die zu dem Schnittpunkt-problem passt. 	
4	Löst $(-1\,|-3)$ die quadratische Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$?	
5	Färben Sie das Würfelnetz so, dass $P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$ und $P(\text{grün}) = \frac{1}{6}$. 	

14	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$ ■	
2	Dies ist ein gleichschenkliges Dreieck. Berechnen Sie sämtliche Winkel. 	
3	Für welche x im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ gilt $\sin(x) = 0$?	
4	Lösen Sie das lineare Gleichungssystem: I) $x - y = 3$ II) $x - y = 4$	
5	Ein Glücksrad hat 20 Felder, davon 18 Nieten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Drehen zweimal zu gewinnen?	

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

15	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $\frac{3}{2}+\frac{7}{3}-\frac{3}{4}=$ ■	
2	Welchen Flächeninhalt hat ein rechtwinkliges Dreieck, dessen kurze Seiten 8 cm und 5 cm lang sind?	
3	Geben Sie alle Lösungen der Gleichung an: $\sin(x) = 1$, für $0 \le x \le 2\pi$	
4	Setzen Sie den Satz fort und geben Sie ein Beispiel an: Brüche werden dividiert, indem ...	
5	Eine Umfrage an 25 Kindern liefert: Zufällig wird ein Kind aus dieser Stichprobe gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind ein Junge ist, falls es ein Haustier besitzt?	

	Haustier	Kein Haustier	Gesamt
Mädchen	9	6	15
Junge	2	8	10
Gesamt	11	14	25

16	Aufgabe	Lösung
1	Setzen Sie das richtige Zeichen zwischen die beiden Zahlen (<, >, =): a) $\sqrt{4}$ ■ $\frac{5}{2}$ b) $\sqrt{5}$ ■ $\sqrt{2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}}$	
2	Berechnen Sie den Abstand der Punkte P = (0|0) und Q = (3|4).	
3	Wo liegen die Punkte, die von x- und y-Achse den gleichen Abstand haben? (Funktionsgleichungen angeben!)	
4	a) Geben Sie eine lineare Gleichung mit der Lösung x = 2 an. b) Geben Sie eine quadratische Gleichung mit der einzigen Lösung x = 1 an.	
5	In der Urne sind bereits 4 schwarze Kugeln. Färben Sie die übrigen Kugeln entsprechend der Wahrscheinlichkeiten: P(schwarz) = 37,5 % und P(grün) = 62,5 %.	

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

17	Aufgabe	Lösung
1	Welcher Bruch entspricht $0,\overline{2}$?	
2	Zeichnen Sie eine Figur, deren Flächeninhalt durch den Term $0{,}5 \cdot 3(a + b)$ berechnet werden kann.	
3	Geben Sie die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion mit der Basis 2 an, die durch die Punkte $P = (0\,|\,2)$ und $Q = (1\,|\,4)$ verläuft.	
4	Vereinfachen Sie den Term: a) $\frac{x}{7} \cdot x^4$ b) $3n^2 \cdot (-5n^4)$	
5	Wie kann man mit einem Glücksrad mit 20 Feldern einen Münzwurf simulieren?	

18	Aufgabe	Lösung
1	Geben Sie zwei Brüche an, die einer periodischen Dezimalzahl entsprechen.	
2	Schätzen Sie das Volumen eines Sattelaufliegers.	
3	Geben Sie eine Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel an, welche nur eine Nullstelle besitzt.	
4	Lösen Sie: $-27x^4 + 1 = 28$	
5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Augensumme 5 zu werfen?	

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

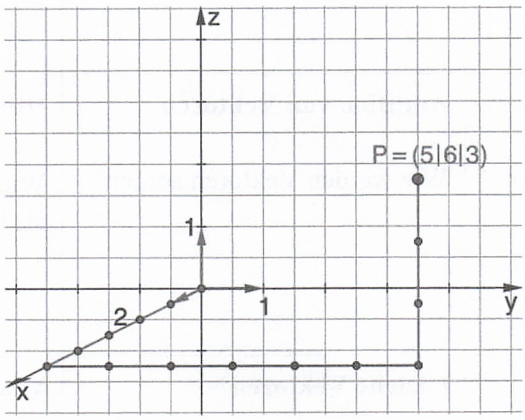
19	Aufgabe	Lösung
1	Schreiben Sie als Dezimalzahl: a) $\sqrt{256} =$ ■ b) $\sqrt{0{,}81} =$ ■	
2	Ein Würfel besitzt ein Volumen von $0{,}6\,m^3$. a) Rechnen Sie um in dm^3. b) Rechnen Sie um in Liter.	
3	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^2 - 6$. An welchen Stellen beträgt der Funktionswert $f(x) = 12$?	
4	Vereinfachen Sie: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right)$	
5	Aus Erfahrung ist bekannt, dass durchschnittlich eine von 20 produzierten Arbeitsplatten Fehler aufweist. Es werden 10 000 Arbeitsplatten produziert. Mit welcher Anzahl fehlerhafter Arbeitsplatten ist ungefähr zu rechnen?	

20	Aufgabe	Lösung
1	Berechnen Sie: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$	
2	Wie lang ist eine Strecke von 500 m auf einer Landkarte im Maßstab 1:10 000?	
3	Geben Sie die Gleichungen zweier Parabeln an, die sich in keinem Punkt schneiden.	
4	Stellen Sie eine Gleichung auf: Das Neunfache einer Zahl erhöht um 8 ist das Gleiche wie das Quadrat dieser Zahl vermindert um 7.	
5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dreimal nacheinander eine Sechs zu würfeln?	

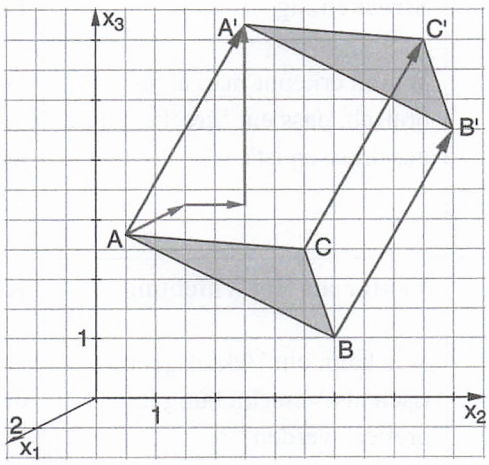
ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Orientieren und Bewegen im Raum

Orientieren im Raum



Bewegen im Raum



ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Orientieren und Bewegen im Raum – Übersicht

Inhalte zum Orientieren und Bewegen im Raum
Auf dieser Seite finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Inhalte (Begriffe und Verfahren) zum Orientieren und Bewegen im Raum.

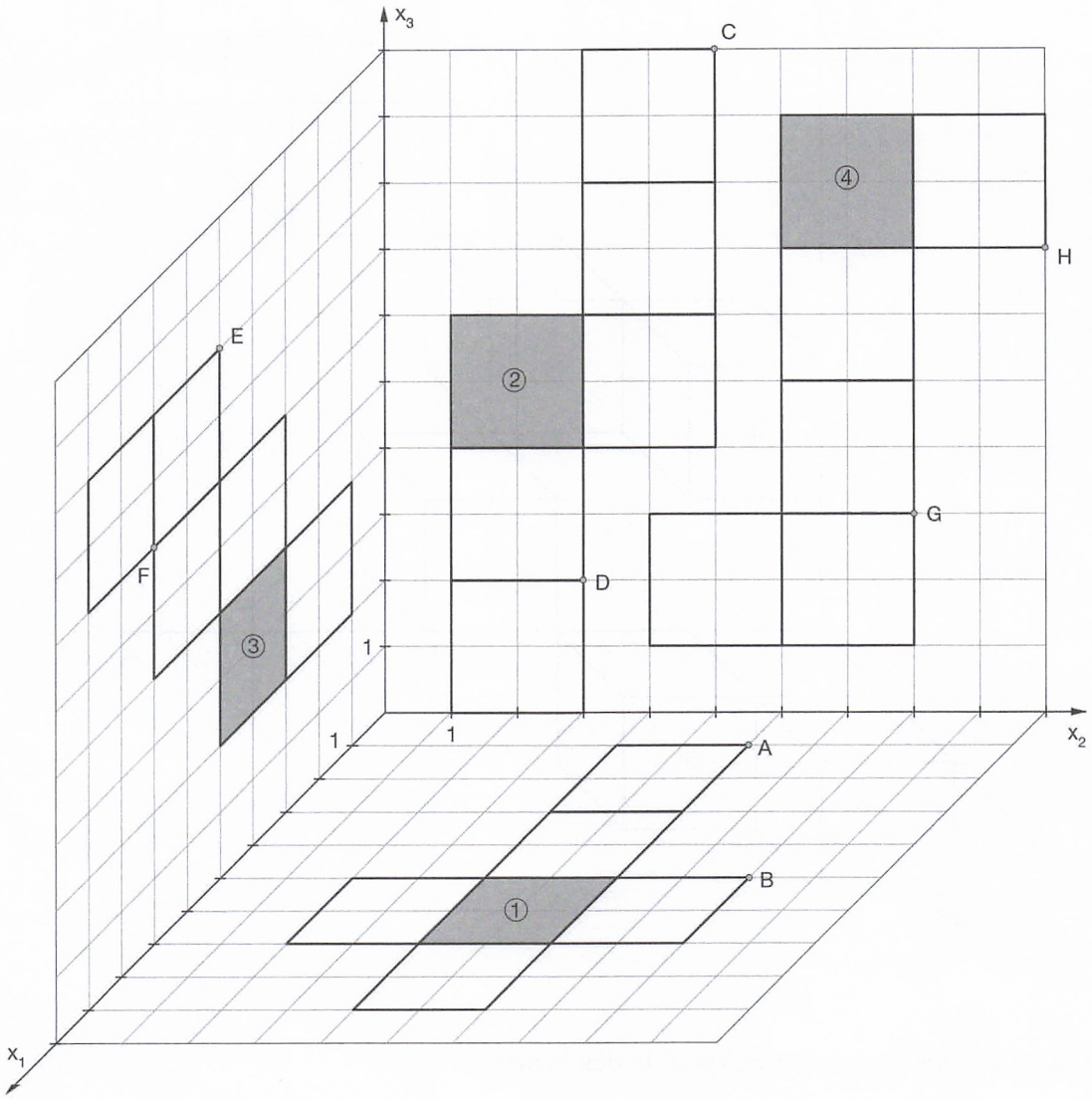
Linearkombination Was ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?	**Punktmenge** Was wird durch alle Tripel $(x\|y\|0)$ mit x und y aus $\mathbb{R}$ beschrieben?	**Betrag eines Vektors** Wie bestimmt man die Länge eines Vektors $\vec{v}$?
Abstand zweier Punkte Wie wird der Abstand zweier Punkte $P_1 = (x_1\|y_1\|z_1)$ und $P_2 = (x_2\|y_2\|z_2)$ bestimmt?	**Addition von Vektoren** Wie werden Vektoren addiert?	**Differenzvektor** Wie lässt sich der Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Differenzvektor darstellen?
S-Multiplikation Ist die S-Multiplikation eines Vektors wieder ein Vektor?	**Gleiche Vektoren** Wodurch sind gleiche Vektoren gekennzeichnet?	**Vektor als Punkt** Wie kann ein Vektor als Punkt im Koordinatensystem interpretiert werden?
Koordinatensystem Wie stehen die Achsen in einem Koordinatensystem zueinander?	**Streckenzug** Woran erkennt man algebraisch, dass ein Streckenzug geschlossen ist?	**Linear abhängig** Wann sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig? Was bedeutet dies geometrisch?
Orthogonale Vektoren Woran erkennt man algebraisch, dass zwei Vektoren zueinander orthogonal sind?	**Vektor als Verschiebung** Wie kann ein Vektor geometrisch als Verschiebung interpretiert werden?	**Kommutativgesetz** Gilt das Kommutativgesetz für die Addition von Vektoren? Begründen Sie algebraisch und geometrisch.

Beantworten Sie kurz die Fragen zu den Begriffen und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfel im Koordinatensystem 1

Vier Würfelnetze sind im dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt. Jedes Netz liegt in einer Achsenebene und eine Fläche ist jeweils dunkel unterlegt. Diese Fläche ist ortsfest, d. h. beim Zusammenbau der Würfel soll diese Fläche nicht bewegt werden. Alle Würfel sollen im Raum des dargestellten 1. Oktanten zusammengesetzt werden.



a) An jedem Würfelnetz sind zwei Eckpunkte markiert. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an, wenn die Würfel zusammengebaut sind.

b) Welche anderen Ecken des jeweiligen Würfelnetzes befinden sich nach dem Zusammenbau am gleichen Punkt wie A, B, …, G, H? Markieren Sie diese in den Würfelnetzen.

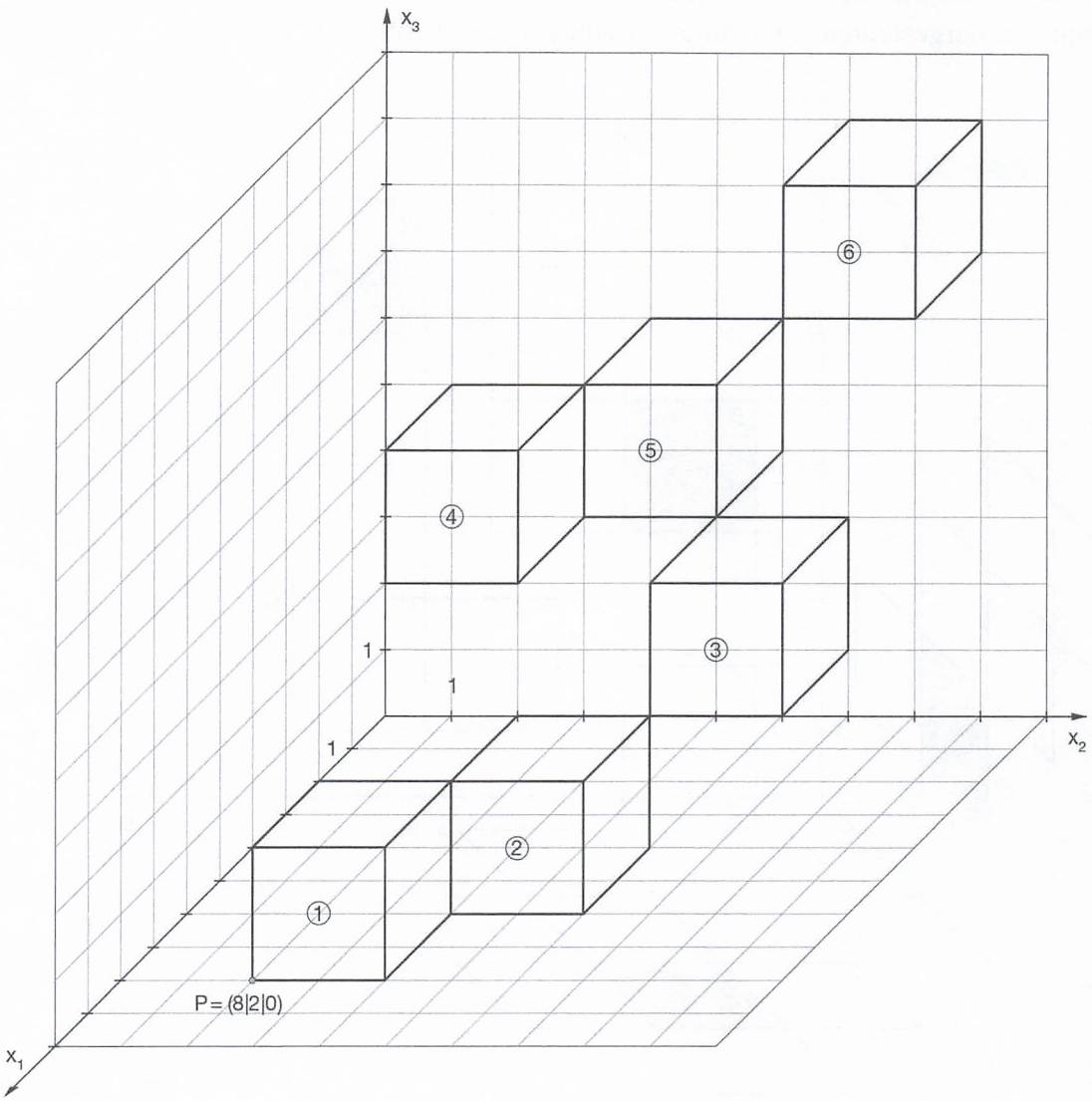
c) Es gibt noch viele weitere Würfelnetze. Zeichnen Sie eines in ein Koordinatensystem. Tauschen Sie mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler und lösen Sie mit der neuen Vorlage die Teilaufgaben a) und b).

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfel im Koordinatensystem 2

Sechs Würfel der Kantenlänge 2 sind im dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt und liegen im 1. Oktanten. Als Orientierungshilfe ist der Punkt P vorgegeben.



a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels 1 an.

b) Welche Ortsvektoren führen zu Ecken, an denen sich Würfel berühren?

c) Welche Würfelecke ist am weitesten vom Ursprung entfernt? Bestimmen Sie deren Entfernung mithilfe des Betrags des entsprechenden Ortsvektors.

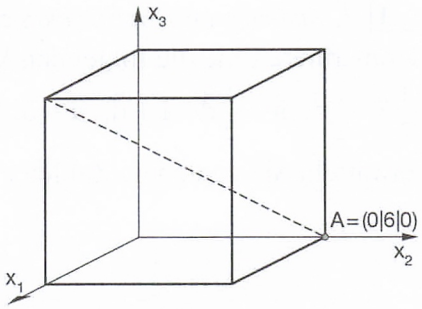
d) Geben Sie die fünf Verschiebevektoren an, um jeden Würfel an die Position von Würfel 4 zu verschieben.

e) Berechnen Sie, wie weit die einzelnen Würfel von Würfel 4 entfernt sind.

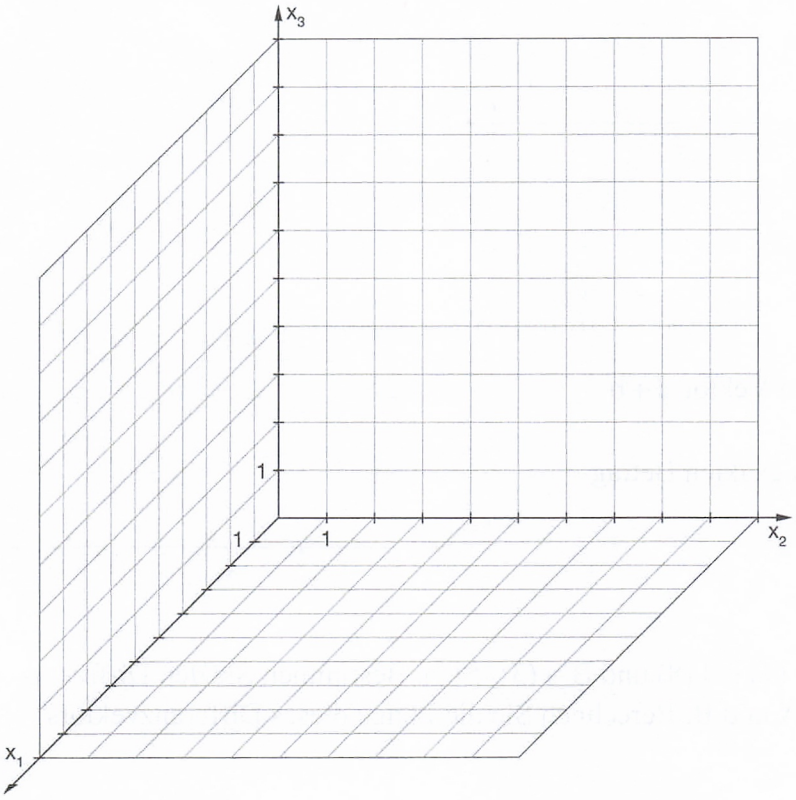
© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien
Neue Wege SII – LA/AG
ISBN: 978-3-507-85586-1

Würfel im Koordinatensystem 3

In einen Würfel mit der Kantenlänge 6 und dem vorgegebenen Punkt A ist eine Raumdiagonale eingezeichnet.



a) Zeichnen Sie diesen Würfel in das dreidimensionale Koordinatensystem. Benennen Sie alle Eckpunkte und geben Sie deren Koordinaten an.



b) Berechnen Sie die Länge der eingezeichneten Raumdiagonalen des Würfels.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte aller Seitenflächen. Zeichnen Sie die Punkte in das Koordinatensystem ein.

d) Mit den sechs Punkten aus Teilaufgabe c) lässt sich ein Oktaeder (Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche, bei der alle acht Kanten gleich lang sind) in den Würfel einzeichnen. Wählen Sie für die beiden Spitzen des Oktaeders die Ober- und Unterseite des Würfels.

e) Berechnen Sie die Länge der Grundseite des Oktaeders.

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

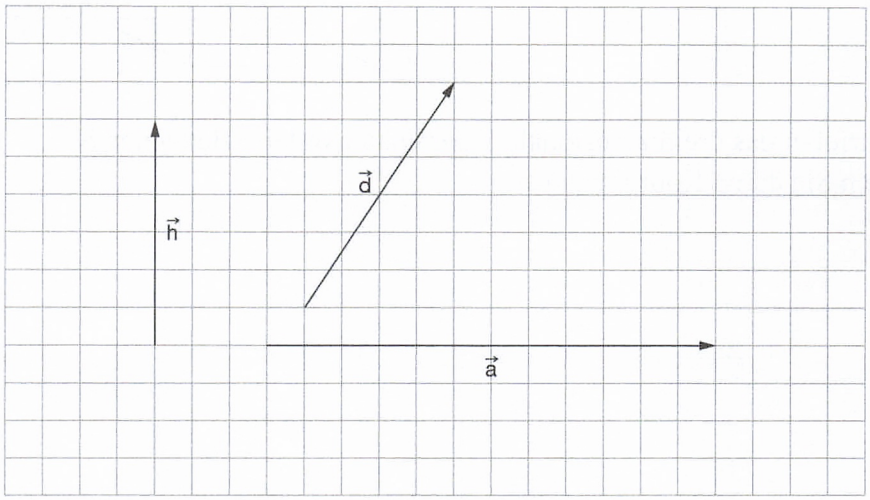
Streckenzüge 1

1 *Konstruieren von Streckenzügen*

Konstruieren Sie die folgenden Vektoren:

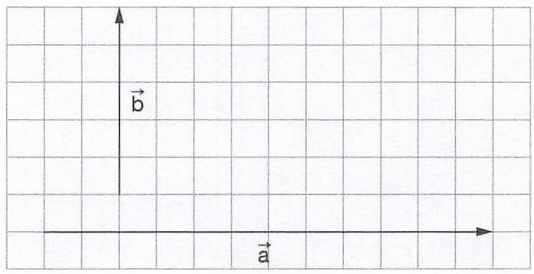
$\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{d}$, $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{d}$, $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{d}$.

Ermitteln Sie geeignete Zahlen r und s, sodass $\vec{h} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{d}$ erfüllt ist.



2 *Vektor $\vec{a}+\vec{b}$*

Ermitteln Sie zeichnerisch den Vektor $\vec{a}+\vec{b}$.
Geben Sie $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ an.
Ermitteln Sie rechnerisch den exakten Betrag von $|\vec{a}+\vec{b}|$.



3 *Differenzvektor*

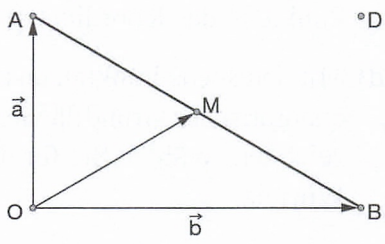
Gegeben sind die Punkte A = (11 | –1 | 8) und B = (3 | –5 | 7). Bestimmen Sie den Differenzvektor der Ortsvektoren von A und B. Berechnen Sie die Länge dieses Differenzvektors.

4 *Streckenzüge zeichnen*

Zeichnen Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zeichnen Sie dann $\vec{b}-\vec{a}$, $\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$, $\vec{a}+2(\vec{b}-\vec{a})$.

5 *Streckenzüge gesucht*

Es sind $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Drücken Sie die folgenden Vektoren durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:



$\overrightarrow{OM}$ = _____ $\overrightarrow{AB}$ = _____

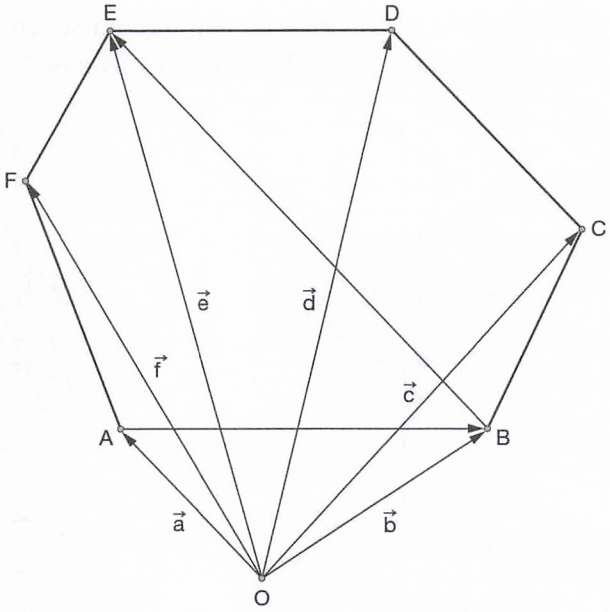
$\overrightarrow{AM}$ = _____ $\overrightarrow{BA}$ = _____

$\overrightarrow{OD}$ = _____ $\overrightarrow{DM}$ = _____ $\overrightarrow{BO}$ = _____

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Streckenzüge 2

1 *Streckenzüge im Sechseck*



a) Markieren Sie die Pfeilspitze von $\vec{d}-\vec{c}$.

b) Geben Sie $\overrightarrow{AB}$ als Differenzvektor an.

c) Der Vektor $\frac{1}{2}\left(\vec{e}+\vec{d}\right)$ hat den Anfangspunkt O. Zeichnen Sie den Zielpunkt ein.

d) Drücken Sie durch eine Vektorgleichung aus: Der Vektor $\overrightarrow{BE}$ ist doppelt so lang wie der Vektor $\overrightarrow{CD}$, parallel zu diesem und gleich orientiert.

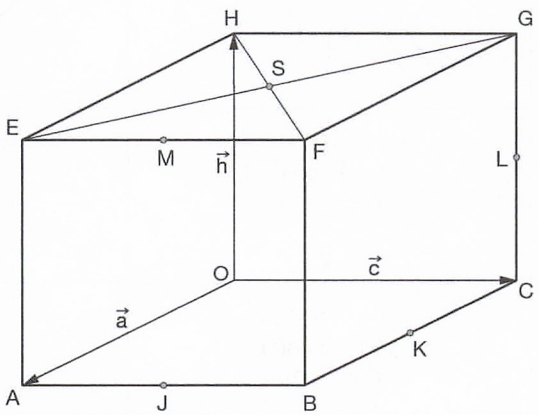
e) Geben Sie als Term mit $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ einen Vektor $\overrightarrow{M_{BC}M_{DE}}$ an, der die Mittelpunkte der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{DE}$ verbindet.

f) Bestätigen Sie rechnerisch: Der Vektor $\overrightarrow{M_{BC}M_{DE}}$ ist das arithmetische Mittel der Vektoren $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{CD}$.

g) Zeigen Sie, dass das Viereck BCDE ein Trapez ist.

h) Geben Sie den Vektor von O zum Schwerpunkt des Dreiecks ABF als Term mit den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{f}$ an.

2 *Streckenzüge im Quader*



a) O ist der Anfangspunkt eines Streckenzuges. Geben Sie jeweils den Zielpunkt an:
$\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{O\square}$, $\vec{h}+\vec{c}=\overrightarrow{O\square}$, $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}=\overrightarrow{O\square}$.

b) Geben Sie die Linearkombinationen aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{h}$ an, die mit Anfangspunkt O die Zielpunkte F, K, L, M, E und S haben.

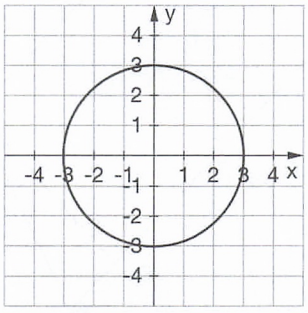
c) Geben Sie die Linearkombinationen aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{h}$ für die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{HB}$ an.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

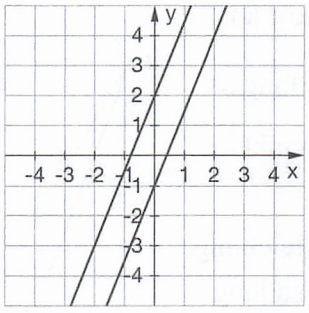
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Descartes Lexikon

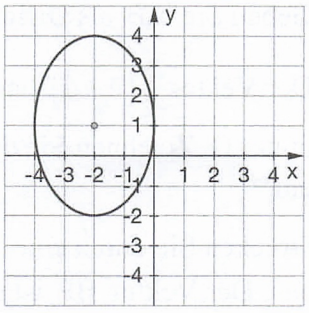
Welches Bild gehört zu welcher algebraischen Form bzw. Gleichung? Schreiben Sie die passenden Paare auf und geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung an.



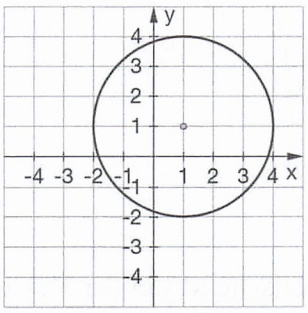
1



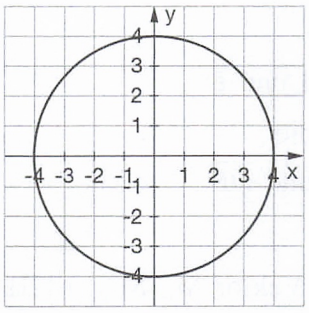
2



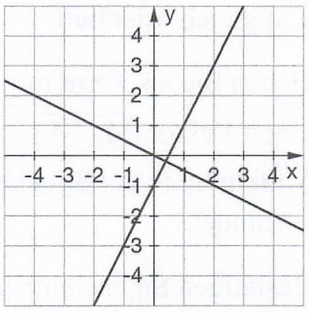
3



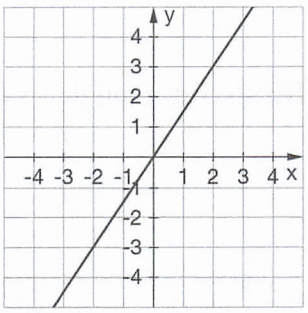
4



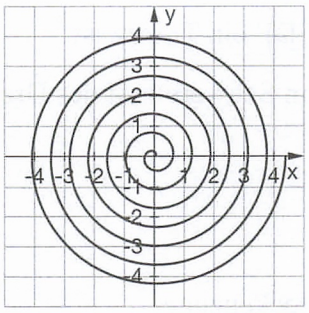
5



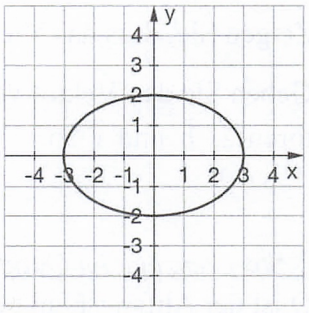
6



7



8



9

$x(t) = 2\cos(t) - 2$ $y(t) = 3\sin(t) + 1$ $0 \le t \le 2\pi$ **A**	$x(t) = 3\cos(t)$ $y(t) = 2\sin(t)$ $0 \le t \le 2\pi$ **B**	$y = 2x - 1$ $y = -0{,}5x$ **C**
$x(t) = 3\cos(t)$ $y(t) = 3\sin(t)$ $0 \le t \le 2\pi$ **D**	$x^2 + y^2 = 16$ **E**	$y = 2{,}5x - 1$ $y = 2{,}5x + 2$ **F**
$x(t) = 3\cos(t) + 1$ $y(t) = 3\sin(t) + 1$ $0 \le t \le 2\pi$ **G**	$x(t) = 0{,}1 \cdot t \cdot \cos(t)$ $y(t) = 0{,}1 \cdot t \cdot \sin(t)$ $0 \le t \le 14\pi$ **H**	$x(t) = 2t$ $y(t) = 3t$ $t \in \mathbb{R}$ **I**

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vektoren

1 *Entscheidungen*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(I) Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

(II) Sind die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ linear abhängig?

(III) Sind der Vektor $\vec{a}$ und der Gegenvektor $-\vec{a}$ linear abhängig?

2 *Orthogonale Vektoren*

a) Erläutern Sie ein Verfahren, mit dem man einen zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonalen Vektor finden kann.

b) Geben Sie solch ein Verfahren wie in Teil a) für Vektoren im dreidimensionalen Raum an.

3 *Verschiedene Vektoren*

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -15 \\ -20 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind gegeben. Bestimmen Sie jeweils den Betrag. Was stellen Sie fest?

4 *Beträge*

Vergleichen Sie $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ und $|\vec{a} + \vec{b}|$.

5 *Verschiedene Begriffe*

Vektoraddition, Differenzvektor, Betrag eines Vektors, S-Multiplikation bestimmen:
Bei welchen Berechnungen ist das Ergebnis kein Vektor?

6 *Vektoren mit dem Betrag 3*

Geben Sie im dreidimensionalen Raum vier verschiedene Vektoren mit dem Betrag 3 an. Wie viele Vektoren mit dem Betrag 3 gibt es, wenn man sich nur auf ganzzahlige Koordinaten beschränkt?

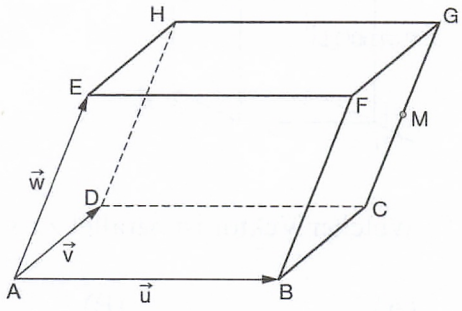
7 *Spat*

Ein Spat ist ein dreidimensionales Parallelogramm.

a) Welche Eigenschaft müssen genau drei Vektoren besitzen, um alle Punkte eines Spates darstellen zu können?

b) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AM}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

c) Wo liegt der Punkt P, für den gilt:
$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$?



ISBN: 978-3-507-85586-1

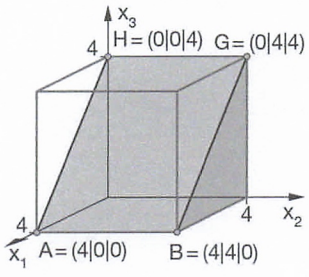
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Multiple Choice

Kreuzen Sie an, welche Antworten richtig sind. Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

a) Welche Punkte liegen außerhalb des Körpers?



(A) $P_1 = (4|4|4)$ ☐

(B) $P_2 = (2|2|2)$ ☐

(C) $P_3 = (0|2|4)$ ☐

(D) $P_4 = (2|2|4)$ ☐

(E) $P_5 = (4|4|2)$ ☐

(F) $P_6 = (3|2|2)$ ☐

b) Welche Punktmenge beschreibt die y-Achse?

(A) Alle Tripel $(x|0|z)$ mit $x, z \in \mathbb{R}$. ☐

(B) Alle Tripel $(0|y|0)$ mit $y \in \mathbb{R}$. ☐

(C) Alle Tripel $(1|y|1)$ mit $y \in \mathbb{R}$. ☐

(D) Alle Tripel $(x|y|z)$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$. ☐

c) Welcher der folgenden vier Vektoren ist der kürzeste?

(A) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐

(B) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐

(C) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐

(D) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

d) Welcher Vektor ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

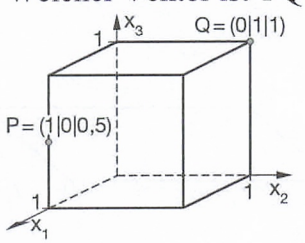
(A) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐

(B) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐

(C) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

(D) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

e) Welcher Vektor ist $\overrightarrow{PQ}$?



(A) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ☐

(B) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐

(C) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ ☐

(D) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

f) Welcher Vektor ist parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$?

(A) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐

(B) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ☐

(C) $\vec{c} = 3\vec{v}$ ☐

(D) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Schach mal anders

1 *2D-Schach*

Auf dem Bild sehen Sie den Aufbau eines klassischen Schachspiels. Ein Zug kann mit den Koordinaten angegeben werden. Der erste Zug des weißen Bauern auf e2 kann damit durch e2–e4 angegeben werden. Ein Schachzug kann auch mithilfe von Vektoren beschrieben werden.

a) Legen Sie ein Koordinatensystem fest, mit dessen Hilfe Züge als zweidimensionale Vektoren angegeben werden können. Welcher Vektor beschreibt den Zug e2–e4? Welcher Vektor beschreibt das Schlagen einer Figur durch einen Bauern?

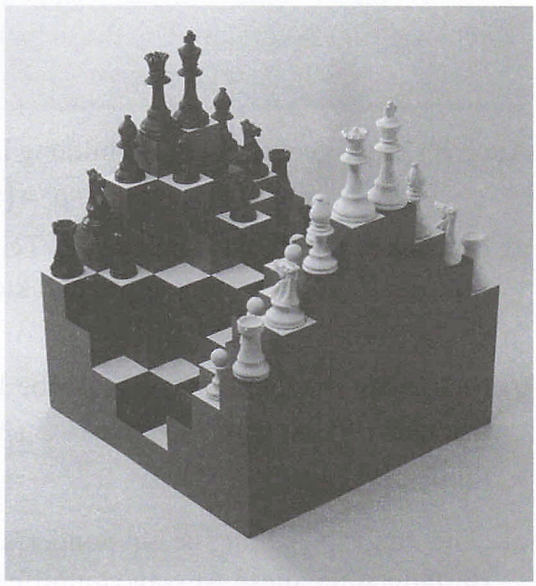
b) Welche Zugmöglichkeiten bestehen für einen Springer auf d4? Welche Zugmöglichkeiten gibt es für die weiteren Figuren, wenn sie auf d4 stehen?

c) Ein Springer zieht von d4 nach f5 und anschließend nach g7. Welchen Zug hat der Springer insgesamt durchgeführt? Welche Figur eines Schachspiels kann diese beiden Züge in einem Zug durchführen?
Kann ein Springer von d4 aus auch Züge hintereinander durchführen, die einem „Turmzug" entsprechen?

d) Sind diese „Zugvektoren" im Schach abhängig von der Position der Figur?

2 *3D-Schach*

Auf dem Bild sehen Sie eine mögliche Umsetzung eines dreidimensionalen Schachbretts. Hierbei gilt, dass sich alle Figuren wie in der zweidimensionalen Version bewegen dürfen; allerdings müssen sie aufgrund des neuen Bretts auch Berge und Täler erklimmen.
Somit kann man einen Zug als dreidimensionalen Vektor angeben.



a) Legen Sie ein praktikables Koordinatensystem fest und geben Sie die Anfangspositionen der weißen Figuren an.

b) Geben Sie Züge einzelner weißer Figuren (z. B. linker Bauer, linker Turm, linker Springer, linker Läufer, Dame und/oder König) von ihrer Startposition aus ohne Berücksichtigung der weiteren Figuren als dreidimensionale Vektoren an. Was fällt Ihnen hierbei auf?

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Punktspiegelung und zentrische Streckung

1 *Punktspiegelung*

Im Laufe der Mittelstufe wurde die Punktspiegelung thematisiert.
Zur Erinnerung:

> Der Bildpunkt P′ eines Punktes P liegt auf der Geraden, die durch P und das Spiegelzentrum Z verläuft. Dabei haben P und P′ den gleichen Abstand von Z.

Beschreibt man nun in der Analytischen Geometrie eine Punktspiegelung mithilfe von Vektoren, so ergibt sich eine kompakte Formel zur Bestimmung der einzelnen Bildpunkte:

$$\vec{p'} = 2\vec{z} - \vec{p}. \quad (1)$$

Hierbei ist $\vec{p'}$ der Ortsvektor des Bildpunktes P′, usw.

a) Gegeben ist das Dreieck A = (2 | 1), B = (6 | 2) und C = (4 | 4). Berechnen Sie die Bildpunkte für eine Punktspiegelung mit dem Spiegelzentrum Z = (1 | 3).

b) Zeichnen Sie das ursprüngliche Dreieck sowie das Bilddreieck in ein Koordinatensystem. Prüfen Sie mithilfe des Punktes Z, ob eine Punktspiegelung stattgefunden hat.

c) Leiten Sie die Formel (1) zur Berechnung der Bildpunkte allgemein her.
Hinweis: Erklären Sie hierzu anhand der Skizze z. B. die Bedeutung der Gleichung $\vec{a} = \vec{z} + (\vec{a} - \vec{z})$.

2 *Zentrische Streckung*

Etwa zur gleichen Zeit wurde auch die zentrische Streckung behandelt.
Zur Erinnerung:

> Der Bildpunkt P′ eines Punktes P liegt ebenfalls auf der Geraden, die durch P und das Streckzentrum Z verläuft. Um die genaue Lage des Bildpunktes P′ zu erhalten, wird der Abstand von P zu Z mit dem Streckfaktor $r \neq 0$ multipliziert.

Auch für diese geometrische Abbildung lassen sich die Bildpunkte berechnen:

$$\vec{p'} = (1 - r)\vec{z} + r\vec{p}. \quad (2)$$

a) Berechnen Sie für das Dreieck aus Teil a) die Bildpunkte für eine Streckung am Streckzentrum Z = (1 | 2) mit dem Streckfaktor r = 2,5. Zeichnen Sie Dreieck und Bilddreieck in ein Koordinatensystem.

b) Begründen Sie (ähnlich wie Aufgabe 1c)) mithilfe der Skizze zu a), warum man jeden Bildpunkt P′ mit dem Ansatz $\vec{p'} = \vec{z} + r(\vec{p} - \vec{z})$ berechnen kann und leiten Sie die Formel (2) her.

c) „Die Punktspiegelung ist ein Sonderfall der zentrischen Streckung."
Bestätigen Sie diese Aussage mithilfe der Formeln (1) und (2).

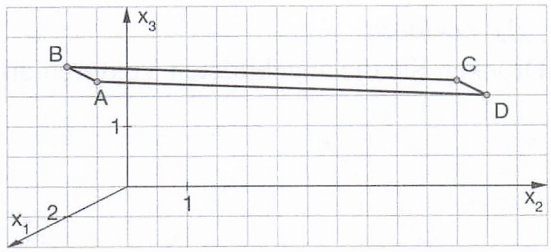
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Begründen mit Vektoren

1 *Parallelogramm*

a) Bestätigen Sie mit Vektoren, dass die vier Punkte A = (1|0|2), B = (4|1|3), C = (1|6|2) und D = (–2|5|1) ein Parallelogramm ABCD bilden.

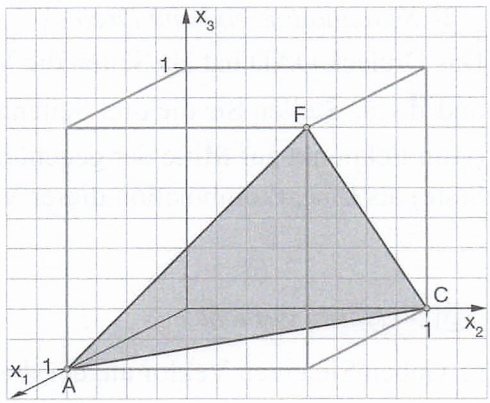
b) Geben Sie den Schnittpunkt S der Diagonalen an.



2 *Gleichseitiges Dreieck*

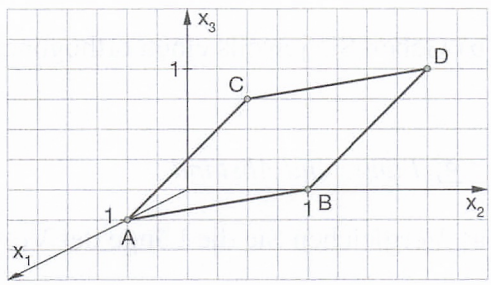
a) Zeigen Sie mit Vektoren, dass das Dreieck ACF im Einheitswürfel mit den Punkten A = (1|0|0), C = (0|1|0) und F = (1|1|1) gleichseitig ist.
Geben Sie auch eine geometrische Begründung.

b) Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.



3 *Raute*

Ergänzen Sie die Punkte A = (1|0|0), B = (0|1|0) und C = (1|1|1) um einen Punkt D, sodass das Viereck eine Raute bildet.
Wie viele solche Punkte gibt es?



4 *Quadrat*

a) Ist das Viereck ABCD mit A = (–1|2|–4), B = (0|4|–2), C = (2|5|–4) und D = (1|3|–6) ein Quadrat?

b) Bestimmen Sie auch den Schnittpunkt S der Diagonalen im Viereck.

5 *Gleichschenkliges Dreieck*

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit A = (4|0|–1), B = (2|6|–4) und C = (–2|3|1) gleichschenklig ist, aber kein gleichseitiges Dreieck ist.

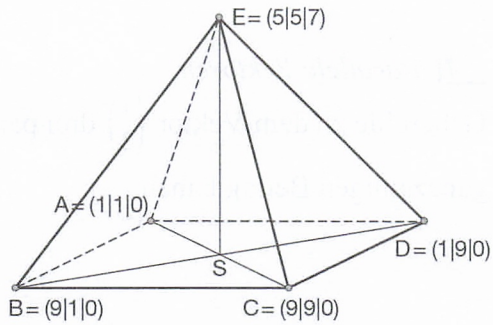
6 *Pyramide*

Die Punkte A, B, …, E bilden eine Pyramide.

a) Geben Sie alle Kanten der Pyramide als Vektoren an.

b) Zeigen Sie mit Vektoren, dass die Grundfläche der Pyramide quadratisch ist und geben Sie den Flächeninhalt der Grundfläche an.

c) Zeigen Sie, dass die Pyramide regelmäßig ist.



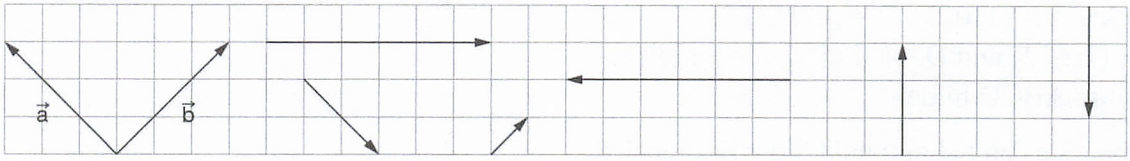
Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up

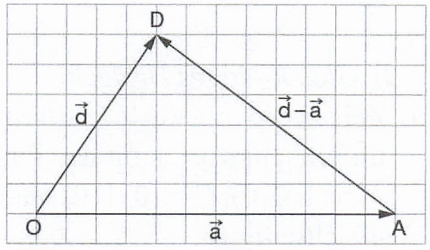
1 *Vektoren*

Drücken Sie die abgebildeten Vektoren durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



2 *Seitenhalbierende im Dreieck*

Das Dreieck OAD hat als Seiten die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{d}$ und $\vec{d} - \vec{a}$. Stellen Sie die drei Seitenhalbierenden (vom Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seite) als Linearkombination dieser Vektoren dar.



3 *Vektoren gesucht*

a) Geben Sie einen Vektor an, der die gleiche Richtung hat wie $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, aber den Betrag 1.

b) Geben Sie jeweils einen orthogonalen Vektor an: $\begin{pmatrix}2{,}5\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

4 *Länge und Abstand*

a) Vergleichen Sie die Länge der Vektoren $\begin{pmatrix}14\\5\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}12\\6\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}11\\10\\2\end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte A = (15 | 6 | 3) und B = (1 | 1 | 1).

5 *Orthogonale Vektoren*

Geben Sie einen Vektor an, der orthogonal zum Verbindungsvektor durch die Punkte A = (2 | 5) und B = (3 | 8) ist.

6 *Strecke, Dreieck, Parallelogramm*

Durch die Punkte A und B ist eine Strecke definiert, durch die Punkte A, B und C ein Dreieck, durch die Punkte A, B, C und D ein Parallelogramm. Geben Sie die Ortsvektoren zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und zum Schwerpunkt des Dreiecks ABC an. Drücken Sie den Ortsvektor $\vec{d}$ des Punktes D durch die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

7 *Parallele Vektoren*

Geben Sie zu dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ drei parallele (kollineare) Vektoren an. Einer davon soll einen ganzzahligen Betrag haben.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest

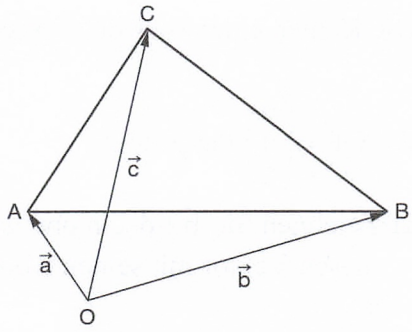
1 *Vektoren im Dreieck*

Die Eckpunkte des Dreiecks ABC haben die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Ergänzen Sie die Vektorgleichungen und zeichnen Sie jeweils den Vektor ein:

$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) = \overrightarrow{O\square}$; $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{O\square}$;

$\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{\square\square}$; $\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{\square\square}$.



2 *Betrag eines Vektors*

Bestimmen Sie den Betrag des Vektors $\vec{h} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$. Begründen Sie, dass der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix}$ orthogonal zum Vektor $\vec{h}$ ist.

3 *Parallelogramm*

Gegeben sind die Punkte A = (2|–3|12), B = (14|1|15), C = (26|6|15) und D = (14|2|12).

a) Stellen Sie die Seiten des Vierecks ABCD als Vektoren dar.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die vier Punkte ein Parallelogramm bilden.

b) Geben Sie den Schwerpunkt des Parallelogramms an.

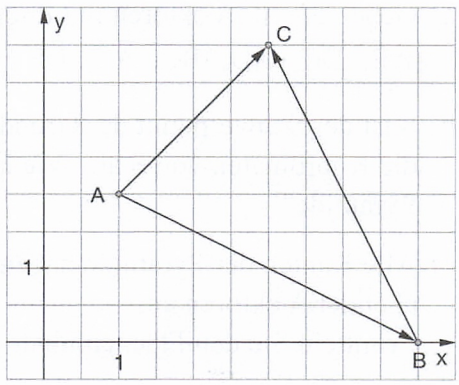
c) Nennen Sie die Bedingung, unter der ein Parallelogramm eine Raute ist.
Zeigen Sie, dass das vorliegende Parallelogramm darüber hinaus eine Raute ist.

d) Das Seitenmittenviereck eines beliebigen Vierecks ist immer ein Parallelogramm. Denken Sie sich die Koordinaten von vier Punkten E, F, G und H aus, zu denen das Parallelogramm ABCD das Seitenmittenviereck ist.
Welches besondere Parallelogramm ist das Seitenmittenviereck einer Raute?

4 *Seitenlängen im Dreieck*

a) Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ hat den Betrag $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$. Geben Sie die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ an.

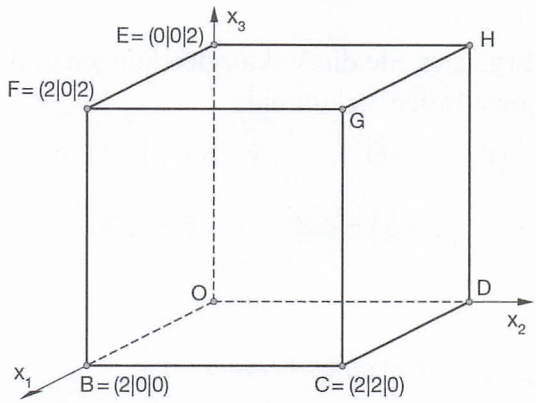
b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 > \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$
oder $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 < \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$:
Welche der drei Aussagen ist für das Dreieck ABC richtig?



ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

5 *Kanten im Würfel*

Die Kanten eines Würfels werden durch die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dargestellt.



a) Zeichnen Sie $\vec{b} + \vec{d}$ ein und geben Sie diesen Vektor mit seinen Koordinaten an.
Welcher Punkt ist der Zielpunkt, wenn $\vec{b} + \vec{d}$ ein Ortsvektor ist?

b) $\vec{e} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $\overrightarrow{OH}$, der zwei Einheiten nach rechts und zwei Einheiten oben nach zeigt.
Geben Sie die folgenden Vektoren mit ihren Koordinaten an und erläutern Sie das Ergebnis in der gleichen Weise: $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BD}$.

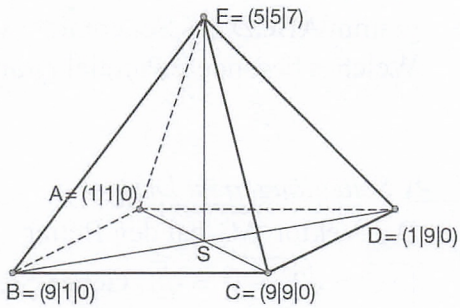
c) Geben Sie sowohl zu den Würfelkanten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ als auch zu den Diagonalen der Würfelflächen $\overline{EG}$ und $\overline{BD}$ jeweils den Ortsvektor zu deren Mittelpunkt an.

6 *Punkte im Raum*

Im dreidimensionalen Raum sind vier Punkte gegeben. Durch unterschiedliche Lage der Punkte können verschiedene geometrische Objekte beschrieben werden. Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es?

7 *Pyramide*

Die Eckpunkte A, B, …, E der Pyramide haben die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, …, $\vec{e}$.



a) Geben Sie die Vektoren mit ihren Koordinaten an: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CE}$.

b) S ist der Schwerpunkt der Grundfläche. Geben Sie die Koordinaten von S an. Wie lang ist die Höhe der Pyramide?

c) Alle Kanten der Pyramide haben ganzzahlige Längen. Geben Sie die Beträge der entsprechenden Vektoren an.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Grundfläche.

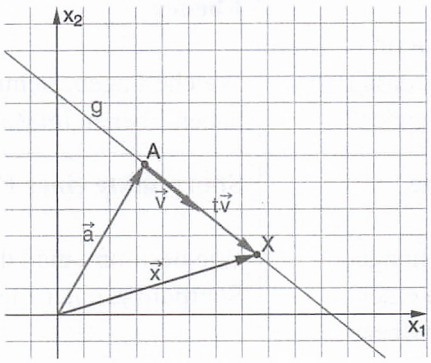
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geraden und Ebenen

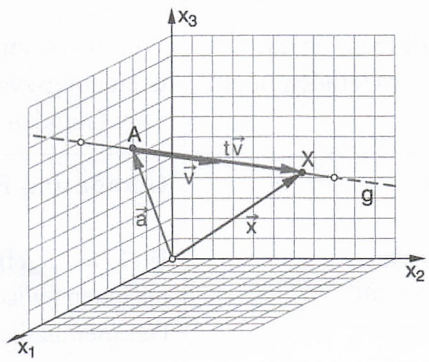
Geraden in der Ebene und im Raum

Punkt-Richtungs-Form einer Geradengleichung

Gerade in der Ebene



Gerade im Raum

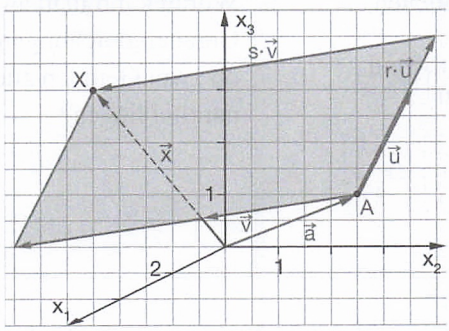


$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$\vec{a}$ **Stützvektor,** $\vec{v}$ **Richtungsvektor**

Ebenen im Raum

Punkt-Richtungs-Form einer Ebenengleichung



$E: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

$\vec{a}$ **Stützvektor**

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ **Richtungsvektoren**

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geraden und Ebenen – Übersicht

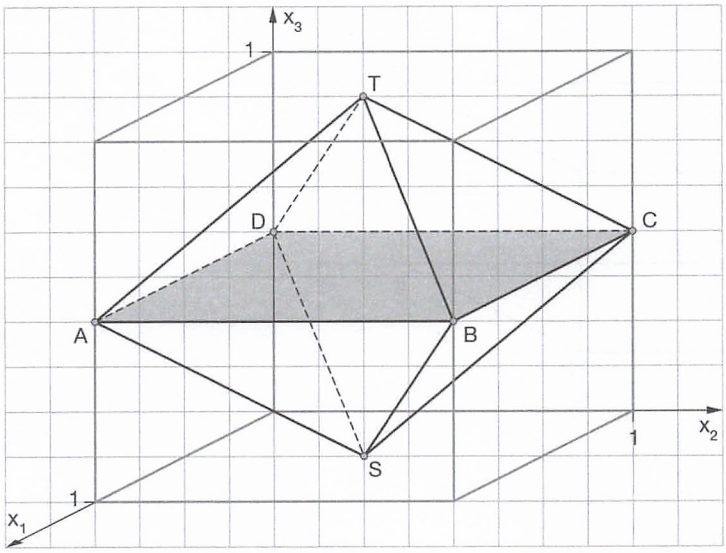
Inhalte zu Geraden und Ebenen
Auf dieser Seite finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Inhalte (Begriffe und Verfahren) zu Geraden und Ebenen.

Lagebeziehungen von Geraden Welche Lagebeziehungen von Geraden gibt es in der Ebene oder im Raum?	**Punkt-Richtungs-Form einer Geradengleichung** Wodurch wird eine Gerade festgelegt?	**Strecke** Wie wird die Strecke $\overline{AB}$ im Raum beschrieben?
Punktprobe Wie überprüft man, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?	**Schneidende Geraden** Woran erkennt man im Gleichungssystem, dass sich zwei Geraden schneiden?	**Lagebeziehungen von Ebenen** Welche Lagebeziehungen haben Ebenen im Raum?
Punktprobe Was wird durch $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ mit $0 \le r \le 1; 0 \le s \le 1$ beschrieben?	**Gerade und Ebene** Welche Lagebeziehungen bestehen zwischen einer Geraden und einer Ebene?	**Spurpunkte einer Ebene** Wie bestimmt man die Spurpunkte einer Ebene?
Spurpunkte einer Geraden Wie sind die Spurpunkte einer Geraden gekennzeichnet?	**Gerade durch zwei Punkte** Wie bestimmt man eine Gerade durch zwei Punkte A und B?	**xy-Ebene** Wie kann die xy-Ebene beschrieben werden?
Koordinatenform Was wird durch die Ebene E: $2x - 3y + z = 0$ beschrieben?	**Lage von zwei Ebenen** Wie liegen die Ebenen E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ zueinander?	**Parallele Geraden** Woran kann man an den Geradengleichungen erkennen, ob zwei Geraden zueinander parallel liegen?

Beantworten Sie kurz die Fragen zu den Begriffen und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Doppelpyramide



In den Würfel ist eine regelmäßige Doppelpyramide einbeschrieben.

a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte an.

b) Beschreiben Sie die Lage der Geraden durch die Punkte S und T im Koordinatensystem. Bestimmen Sie dann ihre Gleichung.

c) Zeigen Sie, dass die Gerade durch S und T das Quadrat ABCD im Mittelpunkt schneidet.

d) Ordnen Sie den Geradengleichungen die Kanten der Doppelpyramide zu, die auf ihnen liegen.

e: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

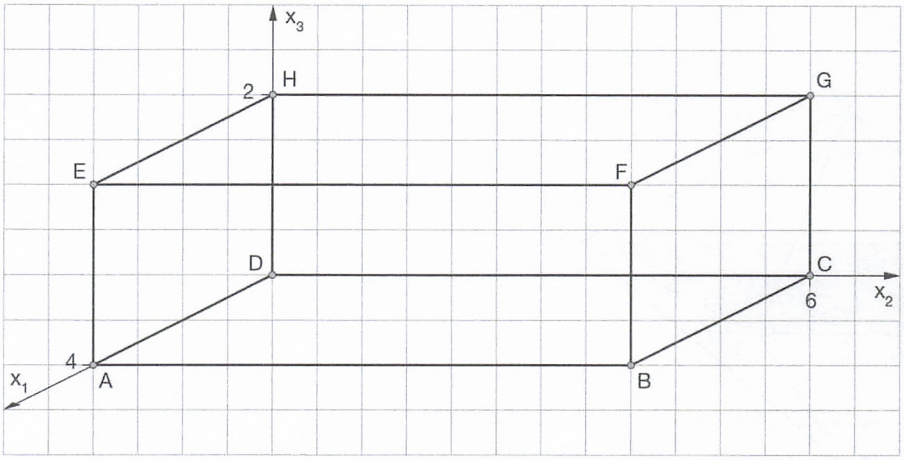
k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) Beschreiben Sie die Flächendiagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ der Doppelpyramide mithilfe von Gleichungen.
Hinweis: Beachten Sie, dass in dem Fall Strecken gesucht sind.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Quader



1 *Schnittpunkt der Raumdiagonalen*
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der vier Raumdiagonalen des Quaders.

2 *Besondere Geraden im Quader*
Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die …

a) … durch S geht und parallel zur Kante $\overline{FG}$ liegt.

b) … durch A geht und parallel zur Raumdiagonalen $\overline{BH}$ verläuft.

c) … den Punkt F sowie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ enthält.

d) … den Punkt C enthält und windschief zur Kante $\overline{BF}$ ist.

3 *Lage von Geraden im Quader*
Bestimmen Sie jeweils die Lage der Geraden g in Bezug zu den beiden Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{CE}$.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

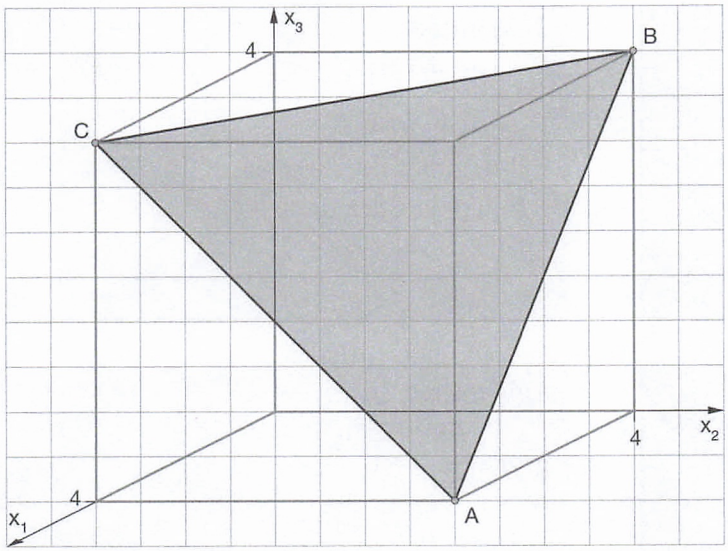
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Dreiecke

1 *Dreieck im Würfel*

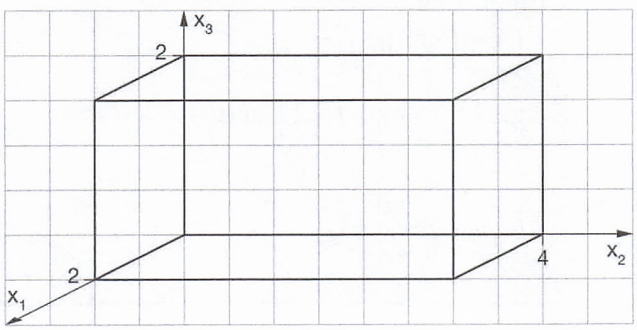


a) Beschreiben Sie die dreieckige Fläche durch Geradengleichungen für die drei begrenzenden Seiten.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

c) Bestätigen Sie, dass $S = \left(\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\right)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

2 *Dreieck im Quader*



a) Zeichnen Sie in den Quader das Dreieck ein, das durch die folgenden Strecken beschrieben wird:

$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}, 0 \le t \le 1;\ g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}, 0 \le t \le 1;\ g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}, 0 \le t \le 1.$

b) Welche Punkte liegen auf den Seiten des Dreiecks aus Teilaufgabe a)?

A = (1 | 3 | 0);	B = (–2 | 6 | 0);	C = (0 | 0 | 1);
D = (1 | 1 | 1);	E = (1,5 | 1,5 | 0,5);	F = (0 | –2 | 3);
G = (0 | 4 | 0);	H = (0 | 2 | 1);	K = (0 | 1 | 1,5)

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Steckbriefe

Im den folgenden Steckbriefen sind Punkte, Geraden oder Ebenen gesucht.

1. Wanted:
$P = (p_1 | p_2 | p_3)$

Eigenschaften:
- P liegt auf der xy-Ebene.
- P liegt auf g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2. Wanted:
$P = (p_1 | p_2 | p_3)$

Eigenschaften:
- P liegt auf der z-Achse.
- P liegt auf der Ebene E: $3x + 4y + 4z = 20$.

3. Wanted:
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 10 \end{pmatrix}$

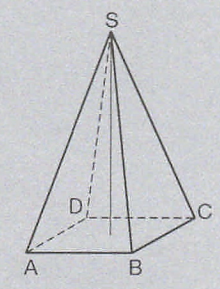
Eigenschaften:
- g ist parallel zu h: $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- P = (8 | 0 | 12) liegt auf g.

4. Wanted:
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Eigenschaft:
- g ist die Schnittgerade von E_1: $x - y = 0$ und E_2: $z = 2$.

5. Wanted:
g: $\vec{x} = \vec{e} + t\,\vec{u}$

Eigenschaften:
- g ist parallel zu $\overline{AD}$ mit A = (4 | 0 | 0) und D = (0 | 0 | 0).
- g enthält S = (2 | 2 | 6).



6. Wanted:
E: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$

Eigenschaft:
- E enthält die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und

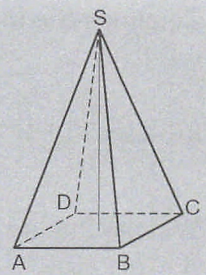
h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Wanted:
E: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$

Eigenschaft:
- E enthält die Punkte P = (0 | 1 | 2), Q = (1 | 2 | 0) und R = (2 | 1 | 0).

8. Wanted:
E: $ax + by + cz = d$

Eigenschaft:
- E enthält die Seitenfläche ABS mit A = (2 | –2 | 1), B = (2 | 2 | 1) und S = (0 | 0 | 7).



ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Geraden per Hand

1 *Schnitt von Geraden*

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden per Hand.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die Gleichungssysteme per Hand.

a) $\begin{aligned} r - 2s &= 0 \\ -r - 3s &= 2{,}5 \\ -4s &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2r + 2s &= 2 \\ 5r + 7s &= 3 \\ -2r - 3s &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2r - s &= 2 \\ 3r - s &= 4 \\ r + 2s &= 6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3r + 2s &= 16 \\ -4r + 2s &= -12 \\ 5r - 2s &= 16 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} r - s &= 3 \\ 3r + s &= 5 \\ -2r - 7s &= -3 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12r + 8s &= -8 \\ 3r + 2s &= -2 \\ -6r - 4s &= 4 \end{aligned}$

3 *Spurpunkte von Geraden*

Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der Geraden g durch die Koordinatenebenen.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Ebenen per Hand

1 *Schnitt von Gerade und Ebene*

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\8\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

2 *Gleichungssysteme*

Lösen Sie die Gleichungssysteme per Hand.

a) $\begin{aligned} 2r + 3s - 2t &= 3\\ r \qquad\quad &= -1\\ 2s - t &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} r + 2s + t &= 2\\ -2r + s + t &= -1\\ r \quad + t &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 6r + s + 2t &= 3\\ 2s + t &= 3\\ 4r + 2s + 4t &= -2 \end{aligned}$

3 *Schnitt von Ebenen*

Bestimmen Sie die Schnittgerade g der beiden Ebenen.

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$; $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$; $E_2: \vec{x} = r_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

4 *Spurgeraden*

Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Ebenen und Geraden

1 *Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade*

Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ und die drei Geraden g, h und k. Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung zu E. Welche Gerade verläuft in E, welche ist parallel zu E, welche schneidet E? Ergänzen Sie die fehlenden Eintragungen.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$	b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$	c) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$
Gleichungssystem $\vec{x}_E = \vec{x}_g$:	Gleichungssystem $\vec{x}_E = \vec{x}_h$:	Gleichungssystem $\vec{x}_E = \vec{x}_k$:
I: $2 + 2r + 0s = 0$	I: _____ $= 0 + 2t$	I: $2 + 2r + 0s =$ _____
II: $1 + 0r - 4s = 4 + 2t$	II: $1 + 0r - 4s = 1 - 4t$	II: _____ = _____
III: $6 + 2r + s = -8 + 4t$	III: $6 + 2r + s =$ _____	III: $6 + 2r + s =$ _____
Umformung 1:	Umformung 1:	Umformung 1:
$r = -1$	$2r - 2t = -2$	$2r - 2t = -2$
_____ $= 3$	$-4s + 4t = 0$	_____ $= 0$
$2r + s - 4t =$ _____	_____ $= -2$	_____ = _____
Umformung 2:	Umformung 2:	Umformung 2:
$8s +$ _____ $= -6$	$2r - 2t = -2$	$2r - 2t = -2$
$s -$ _____ $= -12$	$s = t$	$s = t$
Folgerung: $9s = -18$	$2r - 2t = -2$	_____ = _____
Berechnung von r, s und t:	Beziehung zwischen r, s und t:	Die 1. und 3. Gleichung ergeben einen Widerspruch.
$r = -1$; $s =$ _____; $t = 2{,}5$	$r = t - 1$; $s =$ _____	
Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.	Das Gleichungssystem hat _____.	Das Gleichungssystem hat _____.
Ergebnis: g schneidet E in $S = (___ \mid ___ \mid ___)$.	Ergebnis: h _____.	Ergebnis: k _____.

2 *Von Punkt-Richtungs-Form zur Koordinatenform*

Die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}$ in Punkt-Richtungs-Form soll als

E: $ax + by + cz = 12$ in Koordinatenform dargestellt werden. Bestimmen Sie die Parameter a, b und c der Koordinatenform.

Tipp: Bestimmen Sie mögliche Punkte von E, indem Sie verschiedene Parameterwerte r, s in die Punkt-Richtungs-Form einsetzen.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

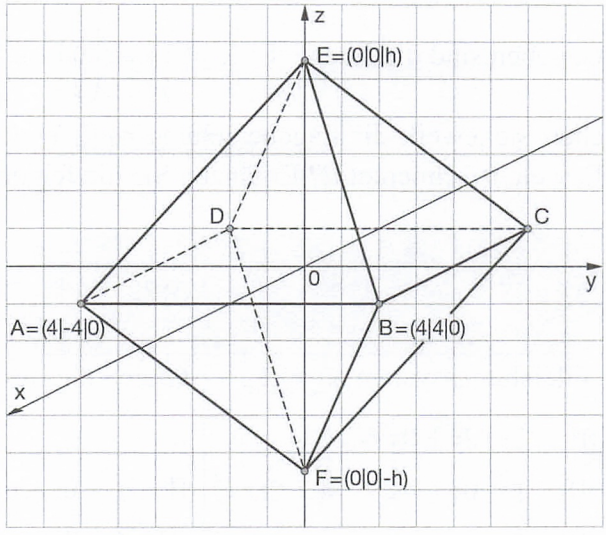
Oktaeder

1 *Kanten und Raumdiagonalen im Oktaeder*

a) ABCD ist ein Quadrat in der xy-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

b) Bestätigen Sie, dass die Doppelpyramide für $h = \sqrt{32}$ ein Oktaeder ist, d. h. zwölf gleich lange Kanten hat.

c) Die Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ stellt die Gerade dar, die die Kante $\overline{AB}$ des Oktaeders enthält.
Entscheiden Sie aus der Anschauung heraus, welche der Geraden AF, CD und FC
- parallel zu g ist,
- windschief zu g ist,
- einen Schnittpunkt mit g hat.



d) Bestätigen Sie Ihre Entscheidung aus Teilaufgabe c) rechnerisch.

e) Die Gerade EF verbindet zwei Eckpunkte des Oktaeders, enthält jedoch keine der Kanten. Beides trifft für zwei weitere Geraden zu. Geben Sie diese an.

2 *Seitenflächen im Oktaeder*

Ein Oktaeder hat die folgenden Eckpunkte:
A = (0|–2|0), B = (2|0|0), C = (0|2|0), D = (–2|0|0), E = (0|0|2) und F = (0|0|–2).

a) Skizzieren Sie das Oktaeder in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Oberfläche des Oktaeders.

c) Die Gleichung E_1: $\vec{x} = \vec{e} + r_1 \vec{u}_1 + s_1 \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ stellt die Ebene dar, die die Seitenfläche S_1 = ABE enthält. Welche Seitenfläche S_2 ist parallel zu S_1?
Entscheiden Sie aus der Anschauung heraus und bestätigen Sie die Parallelität durch Rechnung.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Allerlei zu Geraden und Ebenen

1 *Gleichungen aufstellen*

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Gleichung der folgenden Geraden mit den jeweiligen Eigenschaften.
In welchen Fällen gibt es genau eine solche Gerade bzw. Ebene?

a) Eine Gerade g_1, die parallel zu g durch den Punkt $P_1 = (7|-3|2)$ verläuft.

b) Eine Gerade g_2, die senkrecht zu g durch den Punkt $P_2 = (-2|0|1)$ verläuft.

c) Eine Gerade g_3, welche die Gerade g in $P_3 = (2|-1|3)$ schneidet.

d) Eine zu g windschiefe Gerade g_4.

e) Eine Gerade g_5, die senkrecht zu E durch den Punkt $P_5 = (1|-1|4)$ verläuft.

f) Eine Gerade g_6, die in E liegt und den Punkt $P_6 = (8|1|-3)$ enthält.

g) Eine Gerade g_7, die parallel zu E durch den Punkt $P_7 = (4|0|6)$ verläuft.

h) Eine Ebene E_1, die parallel zu E verläuft und den Punkt $Q_1 = (1|2|3)$ enthält.

i) Eine Ebene E_2, welche die Gerade g und den Punkt $Q_2 = (-4|7|-6)$ enthält.

2 *Identisch oder nicht?*

Welche der folgenden Gleichungen stellen dieselbe Ebene dar? Gibt es auch Gleichungen, die überhaupt keine Ebene darstellen? Welches Gebilde wird dann dargestellt?

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $E: 11x_1 - 12x_2 + 14x_3 = 10$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

e) $E: -11x_1 + 12x_2 - 14x_3 = 17$

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geradenscharen

1 *Verschiedene Scharparameter*

a) Die Gleichung $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Geradenschar g_a.

Auf welcher Geraden liegen die Stützvektoren der Geradenschar?

Beschreiben Sie die Geradenschar.

Welche Schargerade schneidet die x_3-Achse?

b) Die Gleichung $h_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Geradenschar h_a.

Beschreiben Sie die Geradenschar.

Welche Schargeraden schneiden die x_1x_2-Ebene?

Bestimmen Sie die Spurpunkte S_{12} in Abhängigkeit vom Parameter a.

2 *Geradenschar*

Die Gleichung $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Geradenschar g_a.

a) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel sind.

b) Welche Gerade der Schar verläuft durch den Punkt $P = (3\,|\,7\,|\,2)$?

c) Gibt es eine Schargerade, auf der der Koordinatenursprung liegt?

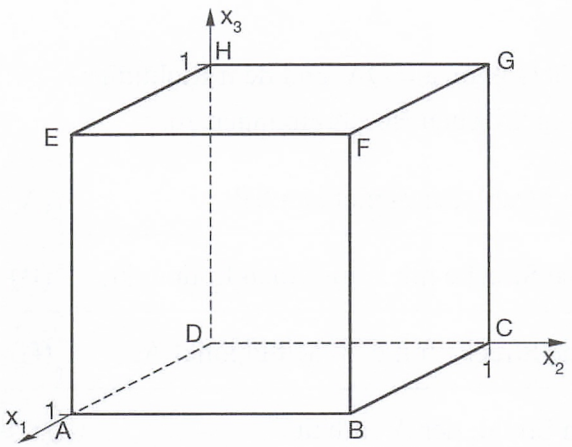
d) Welche Schargerade schneidet die x_2-Achse?
Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt?

e) Gehört die Gerade h, die durch die Punkte $A = (3\,|\,1\,|\,4)$ und $B = (5\,|\,-1\,|\,6)$ verläuft, zu der Geradenschar g_a?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geraden im Einheitswürfel



1 Liegt die Kante $\overline{BC}$ des Würfels auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$?	**2** Welche Kante des Würfels liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$?
3 Sind die Geraden g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; k: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ zueinander senkrecht?	**4** Schneidet die Diagonale d: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ die Geraden g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in Eckpunkten des Würfels?
5 Schneiden sich die Raumdiagonalen des Würfels im Punkt $S = \left(\frac{1}{2}\middle\|\frac{1}{2}\middle\|\frac{1}{2}\right)$?	**6** Geben Sie drei beliebige Kanten des Würfels an, die jeweils keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
7 Haben die Schnittpunkte der Diagonalen aller sechs Seitenflächen im Einheitswürfel jeweils genau zwei Koordinaten mit dem Wert $\frac{1}{2}$?	**8** Welche beiden Diagonalen einer beliebigen Seitenfläche schneiden sich im Punkt $A = (1\,\|\,0\,\|\,0)$?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Punktmengen und Spurpunkte

1 *Parameter in Geradengleichungen*

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit dem Stützvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$. Ordnen Sie die Punktmengen X den geometrischen Beschreibungen zu.

(1)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ 1 \le t \le 3$	Ein Strahl, der A nicht enthält.	(A)
(2)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ -3 \le t \le 3$	Eine Strecke mit A als einen Endpunkt.	(B)
(3)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ 0 \le t \le 3$	Eine Strecke mit dem Mittelpunkt A.	(C)
(4)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ t \in \mathbb{R}$	Ein Strahl, der A enthält.	(D)
(5)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ 1 \le t$	Eine Strecke, die A nicht enthält.	(E)
(6)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ -1 \le t$	Ein Strahl mit dem Anfangspunkt A.	(F)
(7)	X: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ 0 \le t$	Eine Gerade durch A.	(G)

2 *Spurpunkte von Geraden*

a) Beschreiben Sie, wie man die Spurpunkte einer Geraden bestimmen kann und wenden Sie das Vorgehen auf die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ an.

b) Wahr oder falsch?

(I) Spurpunkte einer Geraden sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
(II) Spurpunkte einer Geraden sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen.
(III) Es gibt eine Gerade ohne Spurpunkte.
(IV) Wenn eine Gerade genau einen Spurpunkt hat, geht sie durch den Ursprung.

3 *Spurpunkte und Spurgeraden*

Eine Gerade durch zwei Spurpunkte bezeichnet man als Spurgerade.

Gegeben sind die Ebene E: $3x - 4y + 2z = 12$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden von E.

b) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g.

c) Einer der Spurpunkte von g ist der Schnittpunkt von E und g. Welcher ist es?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vierecke

1 *Zwei Vierecke mit gleich langen Seiten*

Gesucht sind Zahlen für x und y, sodass das Viereck mit den Eckpunkten A = (1 | –4 | 2), B = (1,5 | 0 | 4), C = (1 | x | 2) und D = (0,5 | 0 | y) gleich lange Seiten hat.

- Zeigen Sie, dass es für x genau eine Zahl (x = 4), für y aber zwei Zahlen (y = 0; y = 4) gibt und erklären Sie dies.
- Eines der beiden entstehenden Vierecke ist kein ebenes Viereck. Woran kann man dies an den Koordinaten der Punkte erkennen, ohne zu rechnen?

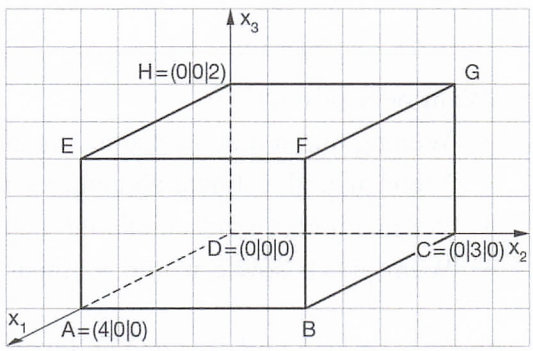
2 *Vierecke*

Von den Vierecken V_1, V_2, V_3, V_4 ist Folgendes bekannt:

- V_1 hat zwei parallele Seiten.
- Keine zwei Seiten von V_2 sind parallel.
- Die Diagonalen von V_3 schneiden sich.
- Die Diagonalen von V_4 schneiden sich nicht.

Geben Sie für jedes Viereck an, ob es ein ebenes Viereck sein muss, ob es kein ebenes Viereck sein kann oder ob beides möglich ist.

3 *Flächen im Quader*



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, E, F und G des Quaders.

b) Die Seitenfläche S = ADHE liegt auf der Ebene $E: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Schränken Sie die Parameter r und s so ein, dass die Seitenfläche S beschrieben wird.

c) Die Ebene E aus b) kann auch beschrieben werden durch $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Schränken Sie nun die Parameter r_1 und s_1 so ein, dass die Seitenfläche S beschrieben wird.

d) Ergänzen Sie: Das Rechteck R = BCHE kann beschrieben werden durch

$R: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ mit _____ $\leq r \leq$ _____ und _____ $\leq s \leq$ _____.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Schnittmengen

1 *Zwei Geraden*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$.

a) Ergänzen Sie die folgenden Sätze:

- Wenn g und h sich schneiden, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ _____;
  die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ lässt sich _____.
- Wenn g und h identisch sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ _____;
  die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist ein _____.
- Wenn g und h parallel sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ _____;
  die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist kein _____.
- Wenn g und h windschief sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ _____;
  die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ lässt sich nicht _____.
- Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, dann können g und h _____
  _____.
- Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, dann können g und h _____
  _____.

b) Wahr oder falsch?

- Wenn g und h identisch sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig und es gilt $\vec{a} = \vec{b}$.
- Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind und $\vec{a} = \vec{b}$ gilt, dann sind g und h identisch.
- Wenn g und h windschief sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig und es gilt $\vec{a} \neq \vec{b}$.
- Wenn $\vec{a} \neq \vec{b}$ sowie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, dann sind g und h windschief.

2 *Zwei Ebenen und ein Gleichungssystem*

Bei der Bestimmung der Schnittmenge der Ebenen

$$E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}11\\-4\\0\end{pmatrix}$$

wird die Matrix $M = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$ benutzt. Wo steckt der Fehler?

3 *Parallele Gerade gesucht*

Eine der Geraden aus der Schar $g_a\colon \vec{x} = t\begin{pmatrix}2\\4\\a\end{pmatrix}$ ist parallel zur Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Welche ist es?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Multiple Choice

Kreuzen Sie an, welche Antworten richtig sind. Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

a) Welche Gerade ist parallel zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$?

(A) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐

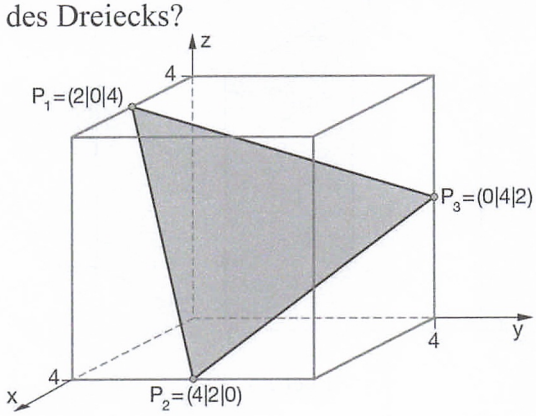
(B) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ☐

(C) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ ☐

b) Welche Punkte sind Spurpunkte von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$?

(A) (0|0,5|2) ☐ (B) (0|0|1) ☐ (C) (–2|0|1) ☐ (D) (6|2|0) ☐

c) Auf welcher Geraden liegen Begrenzungsstrecken des Dreiecks?



(A) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$ ☐

(B) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$ ☐

(C) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ ☐

(D) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ ☐

d) Welche Aussagen sind wahr?

(A) Von drei Geraden im Raum schneiden sich immer mindestens zwei. ☐

(B) Die Punktmenge X: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ beschreibt die xy-Ebene. ☐

(C) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist parallel zur y-Achse. ☐

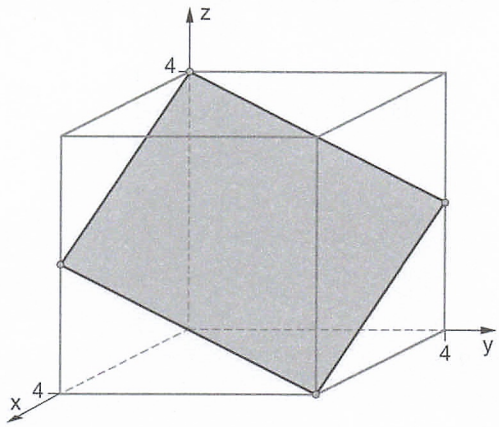
(D) Die Punktmenge X: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\-43\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$ beschreibt eine Ebene. ☐

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

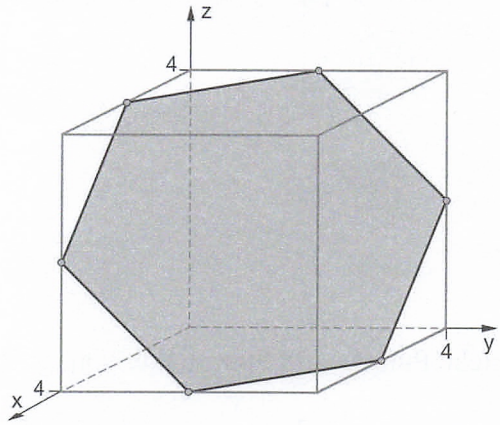
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfelschnitte

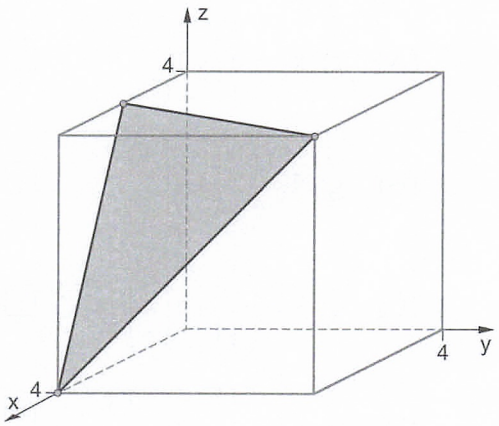
Ein Würfel mit der Kantenlänge 4, der einen Eckpunkt im Ursprung hat, wird durch vier verschiedene Ebenen geschnitten. Die markierten Punkte sind entweder Eckpunkte oder Mittelpunkte der entsprechenden Kanten. Sie gehören in allen vier Fällen zur dargestellten Ebene.



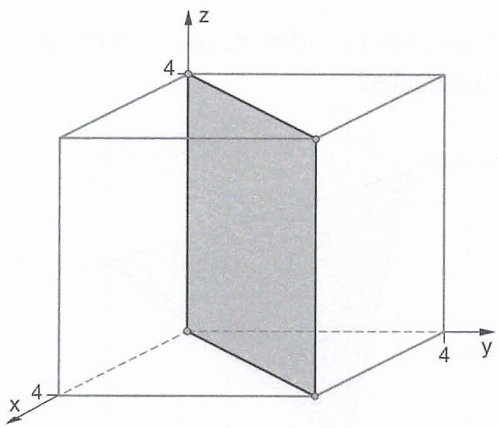
Ebene 1



Ebene 2



Ebene 3



Ebene 4

a) Ordnen Sie die folgenden Ebenengleichungen in Punkt-Richtungs-Form den entsprechenden Ebenen zu.

Gleichung 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gleichung 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichung 3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichung 4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Ordnen Sie die Ebenengleichungen in Koordinatenform den entsprechenden Ebenen zu.

Koordinatenform 1: $x - y = 0$

Koordinatenform 2: $x + y + 2z = 8$

Koordinatenform 3: $x + y + z = 6$

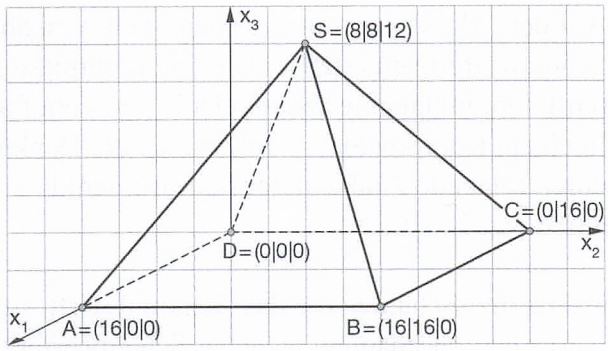
Koordinatenform 4: $2x - y + z = 8$

Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1 Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kunsthalle

Ein neu zu errichtendes Kunstmuseum soll die Form einer quadratischen Pyramide haben. Einer der Entwürfe ist rechts abgebildet.
Eine Längeneinheit entspricht 1 Meter.



a) Berechnen Sie die Länge d der von S ausgehenden Kanten und die Höhe h der Seitenflächen.

b) Die Pyramidenflächen ABS und BCS sollen aus Glas bestehen. Wie viel Quadratmeter Glas werden benötigt?

c) In der Nähe des Museums soll ein senkrechter Lichtmast errichtet werden. Zwei an diesem Mast angebrachte Scheinwerfer sollen die Pyramide beleuchten. Der Fußpunkt des Mastes ist im vorgegebenen Koordinatensystem der Punkt $F = (-4\,|\,20\,|\,0)$. Die beiden Scheinwerfer sollen in 24 m Höhe bzw. in 20 m Höhe angebracht werden.
Bestätigen Sie, dass für den unteren Scheinwerfer der Schattenpunkt der Pyramidenspitze S auf dem Boden die Koordinaten $P = (26\,|\,-10\,|\,0)$ hat.
Berechnen Sie den Schattenpunkt Q von S für den Scheinwerfer in 24 m Höhe.

Der zukünftige Leiter des Museums macht einen Änderungsvorschlag:
Die Spitze S der Pyramide soll verschoben werden; und zwar so, dass die Fläche BCS – in der der Eingang vorgesehen ist – orthogonal zum Boden ist. Die Höhe der Pyramide bleibt dabei unverändert. Nach den Vorstellungen des Museumsleiters soll damit weniger Glas für die Pyramide benötigt werden.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der verschobenen Spitze und skizzieren Sie die Pyramide.

e) Weisen Sie nach, dass die nun entstandene Seitenfläche ABS rechtwinklig ist und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

f) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche BCS.

g) Überprüfen Sie die Behauptung des zukünftigen Museumsleiters, dass für die geänderte Pyramide weniger Glas gebraucht wird.

ISBN: 978-3-507-85586-1

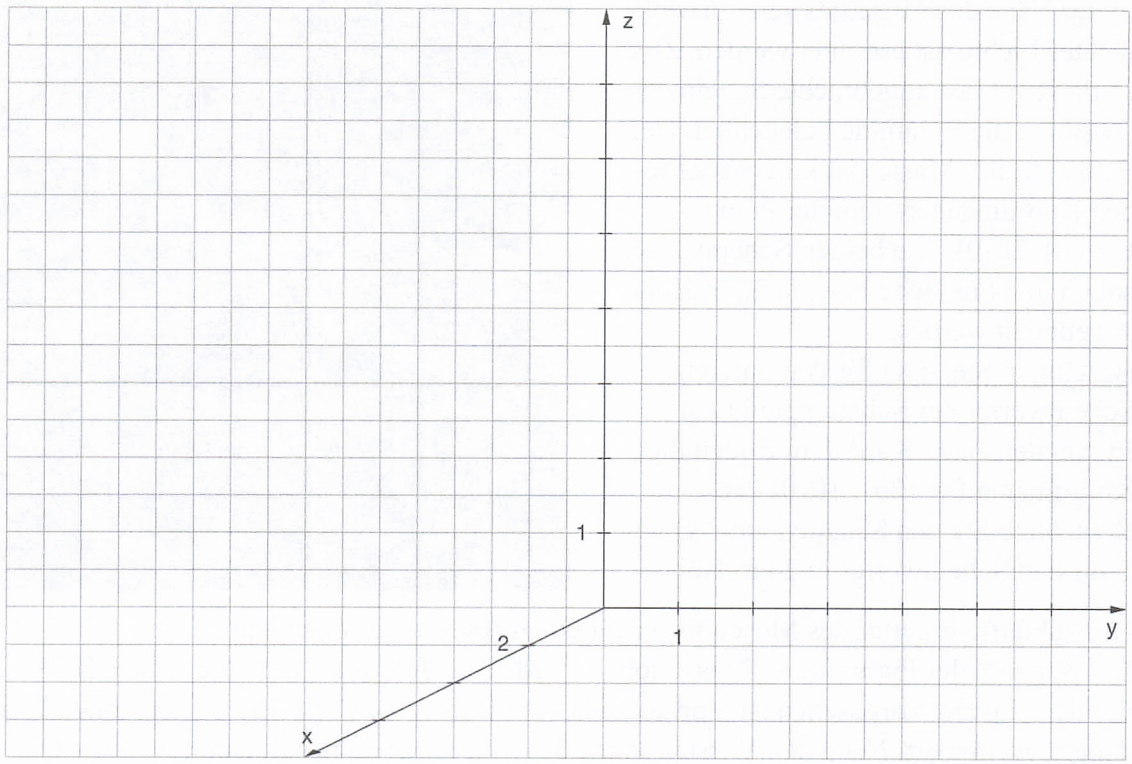
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Schatten eines Denkmals

Auf dem Marktplatz einer großen Stadt wird abends ein 3 m hohes Denkmal von drei Scheinwerfern angestrahlt. Die drei Lichtmasten sind unterschiedlich hoch (8 m, 5 m und 6 m), ihre Fußpunkte aber sind alle 5 m vom Fußpunkt des Denkmals entfernt.
In einem Koordinatensystem können die Denkmalspitze D und die Scheinwerfer A, B und C durch folgende Punkte dargestellt werden: $D = (0|0|3)$, $A = (5|0|8)$, $B = (-4|3|5)$ und $C = (3|-4|6)$.

a) Die drei Schatten, die das Denkmal wirft, sind unterschiedlich lang. Vermuten Sie allein aus der Anschauung, welcher Scheinwerfer den kürzesten und welcher den längsten Schatten wirft.

b) Tragen Sie das Denkmal und die drei Lichtmasten in das folgende Koordinatensystem ein.



c) Berechnen Sie die Schattenpunkte der Denkmalspitze und tragen Sie die Schatten ebenfalls in das Schaubild ein. Überprüfen Sie Ihre Vermutung aus Teilaufgabe a).

d) Von der Anschauung her ist es selbstverständlich: Wenn ein Scheinwerfer auf gleicher Höhe mit der Spitze des Denkmals oder unter dieser angebracht ist, gibt es auf dem Boden keinen Denkmalschatten. Weisen Sie dies rechnerisch nach.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up 1

1 *Punkte, Geraden und Strecken*

Das Dreieck D = PQR hat die Eckpunkte P = (4|0|0), Q = (–2|1|2) und R = (2|0|4).

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die P und Q enthält.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die R enthält und parallel ist zu g.

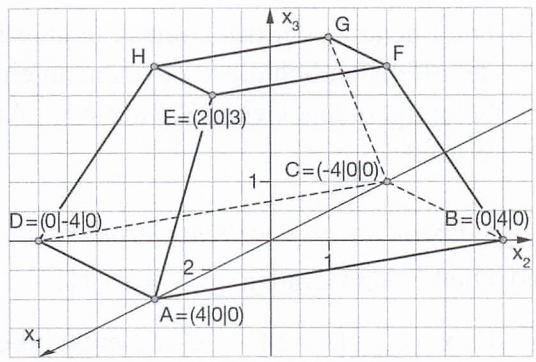
c) Beschreiben Sie die Strecke $\overline{PQ}$ mithilfe der Geradengleichung aus Teil a).

d) Ergänzen Sie: A = (■|3|■) ∈ g und B = (–4|■|■) ∈ h.

e) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks D.

2 *Lagebeziehungen von Geraden*

Gegeben ist ein quadratischer Pyramidenstumpf.



a) Von den drei Geraden AB, DC und AE haben zwei einen Schnittpunkt, zwei sind parallel und zwei sind windschief.
Ordnen Sie aus der Anschauung zu und bestätigen Sie Ihre Zuordnung rechnerisch.

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, die D enthält und parallel ist zu AE.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte F, G und H.

3 *Ebenengleichungen und Lagebeziehungen von Ebenen*

Gegeben sind zwei Ebenen: E_1 enthält die Punkte $P_1 = (6|4|0)$, $P_2 = (0|4|-3)$ und $P_3 = (0|0|-6)$.
E_2 hat die Koordinatenform: $x + y - 2z = 0$.

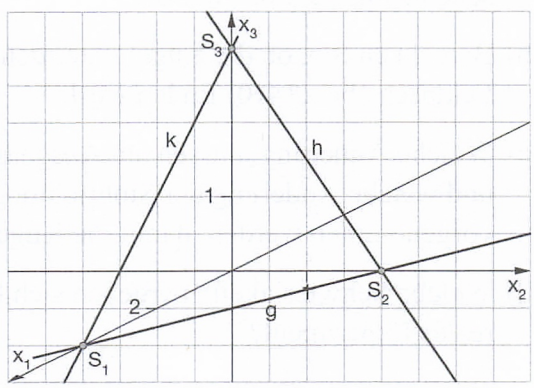
a) Eine Koordinatenform von E_1 ist: $ax + by + cz = 24$. Bestimmen Sie a, b und c.

b) Zeigen Sie, dass E_1 und E_2 nicht parallel sind.

c) Weisen Sie nach, dass $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Schnittgerade von E_1 und E_2 ist.

4 *Spurpunkte und Spurgeraden*

Die Ebene E hat die Spurpunkte $S_1 = (4|0|0)$, $S_2 = (0|2|0)$ und $S_3 = (0|0|3)$.
Geben Sie eine Gleichung von E und die Gleichungen der Spurgeraden $g = S_1S_2$, $h = S_2S_3$ und $k = S_3S_1$ an.



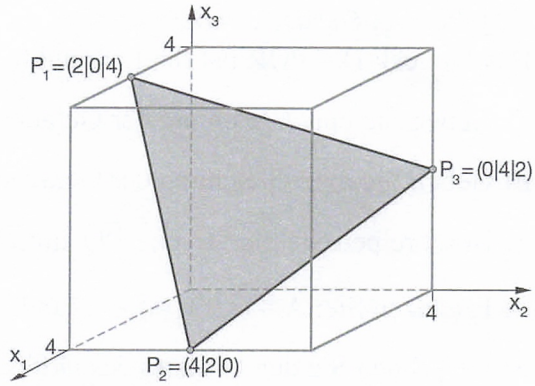
ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up 2

1 *Geraden und Ebenen im Würfel*



a) Geben Sie die Strecken des Dreiecks im Würfel an.

b) Liegt der Punkt M = (2 | 3 | 1) auf einer der drei Strecken?

c) Geben Sie eine Ebenengleichung an, in der das Dreieck liegt.

d) Liegt der Schwerpunkt S des Würfels auf dieser Ebene?

e) Die Ebene, in der das Dreieck liegt, schneidet offensichtlich die x_1x_3-Ebene in einer Schnittgeraden. Geben Sie diese an. An welchen Punkten schneidet die Schnittgerade den Würfel?

2 *Ebene durch parallele Geraden*

a) Die beiden Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ und h: $\vec{x} = \vec{c} + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ sind parallel. Die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + r\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + s\left(\vec{c} - \vec{a}\right)$ enthält beide Geraden. Fertigen Sie eine Skizze an.

Erklären Sie, warum E: $\vec{x} = \vec{a} + r\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ keine Ebenengleichung ist.

Geben Sie einen anderen Stützpunkt und zwei andere Richtungsvektoren für E an.

b) Die beiden Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ und h: $\vec{x} = \vec{c} + s\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ seien parallel, aber nicht identisch. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die beide Geraden enthält.

3 *Billard*

Die diagonal gegenüberliegenden Innenpunkte der Ecktaschen eines Poolbillardtisches befinden sich bei A = (0 | 0) und C = (14 | 28). Ein Spieler möchte einen Trickstoß über drei Banden in eine Ecktasche ausführen. Seine Anspielkugel liegt bei P = (6 | 4) und seine Stoßrichtung verläuft parallel zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie obigen Sachverhalt und versuchen Sie das Problem mithilfe einer geometrischen Konstruktion zu lösen.

b) Berechnen Sie, ob die Kugel unter den oben genannten Bedingungen ihren Weg in die Ecktasche bei (14 | 0) finden wird.

c) Welche Änderung müssen am Ausgangspunkt der Anspielkugel bei gleicher Stoßrichtung und welche Änderung der Stoßrichtung bei gleichem Ausgangspunkt der Anspielkugel vorgenommen werden, damit die Kugel ihren Weg ins Loch findet?

d) Welche Schwierigkeiten ergeben sich bei der Umsetzung der Aufgabenstellung in ein reales Experiment?

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 1

1 *Untersuchung eines Dreiecks*

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A = (0|0|0), B = (0|3|4) und C = (0|0|5).

a) Woran erkennt man, dass das Dreieck in der yz-Ebene liegt?

b) Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, auf denen die Dreiecksseiten liegen.

c) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichseitig ist.

d) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

2 *Zwei Geraden*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass die Punkte auf g bzw. h liegen:
$P_1 = (\square|-5|\square) \in g$; $P_2 = (\square|\square|5) \in g$; $Q_1 = (\square|-3|\square) \in h$; $Q_2 = (3|\square|\square) \in h$.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h.

c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die von g und h aufgespannt wird.

3 *Zwei Ebenen*

Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x - 3y + 4z = 10$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie die Lage der Ebenen zueinander. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

b) Welche der drei Punkte A = (5|4|3), B = (1|0|2) und C = (0|0|2) liegen auf E_1, welche liegen auf E_2?

4 *Spurpunkte und Spurgeraden*

Die Ebene E hat die Spurpunkte $S_1 = (2|0|0)$, $S_2 = (0|1|0)$ und $S_3 = (0|0|5)$.

a) Geben Sie die Gleichung von E in der Form E: $ax + by + cz = 10$ an.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die P = (2|1|–1) enthält und orthogonal ist zu E.

c) Berechnen Sie die Spurpunkte von g.

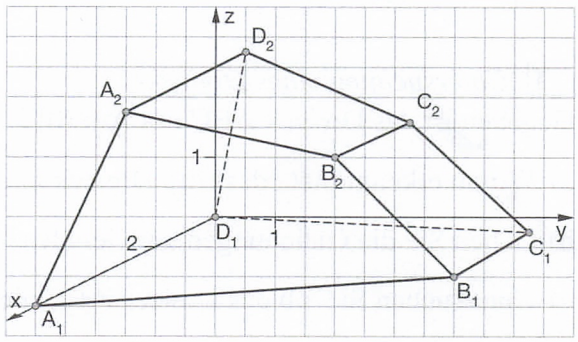
d) Die Ebene E_2 ist parallel zu E und hat den Spurpunkt $S_3 = (0|0|10)$. Geben Sie die Spurpunkte S_1 und S_2 der Ebene E_2 an.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

5 *Schwimmhalle*

Die Form einer geplanten Schwimmhalle ähnelt einem Pyramidenstumpf. Eine mögliche Darstellung im Koordinatensystem hat die folgenden Eckpunkte:
$A_1 = (6|0|0)$, $B_1 = (4|6|0)$, $C_1 = (1|6|0)$,
$D_1 = (0|0|0)$, $A_2 = (5|1|3)$, $B_2 = (4|4|2)$,
$C_2 = (1{,}5|4|2)$, $D_2 = (1|1|3)$.



a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ein Trapez ist.

b) Berechnen Sie die Länge der Kanten $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{B_1B_2}$.

c) Vom Mittelpunkt der Kante $\overline{B_1B_2}$ soll ein zur Seitenfläche $F = B_2B_1\,C_1C_2$ orthogonaler Stützvektor errichtet werden. Wo trifft dieser auf dem Boden auf?

d) Es wird vorgeschlagen, die Halle durch einen gläsernen Aufbau zu einer Pyramide zu vervollständigen. Ist dies möglich?

e) Bei einer letzten Prüfung des Vorschlags aus Teil d) wird festgestellt, dass die Seitenflächen $A_1B_1B_2A_2$ und $D_1C_1C_2D_2$ nicht eben sind. Dies könne aber durch Vertauschung der z-Koordinaten von B_2 und D_2 behoben werden.
Prüfen Sie den Einwand und den Änderungsvorschlag für die Fläche $A_1B_1B_2A_2$.

6 *U-Boot*

Für die folgende Aufgabe gilt: Die x-Achse zeigt nach Süden, die y-Achse nach Osten, die z-Achse in die Höhe. 1 LE entspricht 10 m.
Ein U-Boot befindet sich im Punkt $U_1 = (800|0|{-}36)$, das Begleitschiff im Punkt $B = (0|0|0)$.

a) Zunächst fährt das U-Boot Kurs Nordwest mit gleichbleibender Tiefe. Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{u}$ an. Stellen Sie die Gleichung der Geraden g auf, die die Fahrt beschreibt. Weisen Sie nach, dass der Punkt $U_2 = (600|{-}200|{-}36)$ auf der Route liegt.

b) Im Punkt U_2 ändert das Boot den Kurs. Der Richtungsvektor ist nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$.

An welchem Punkt taucht das U-Boot auf der Wasseroberfläche auf, wenn es diesen Kurs beibehält?

c) Der Auftauchpunkt muss mindestens 6 km vom Begleitschiff entfernt sein. Wird diese Bedingung erfüllt?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 2

1 *Parallelogramm*

Die Punkte A = (3 | –1 | 2), B = (1 | 0 | –2), C = (2 | 1 | 2) und D = (4 | 0 | 6) bilden ein Viereck.

a) Zeichnen Sie das Viereck ABCD in ein Koordinatensystem.

b) Begründen Sie rechnerisch, dass die Punkte ABCD ein Parallelogramm bilden.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Mittelpunkt M der Diagonalen AC und zeichnen Sie die Diagonale sowie M ein. Zeigen Sie, dass M auch der Mittelpunkt der Diagonalen BD ist. Was bedeutet dies geometrisch?

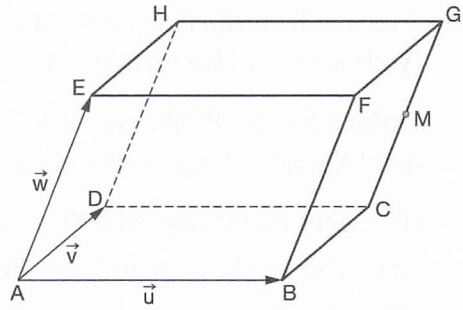
d) Liegt der Punkt P = (–1 | –3 | 0) auf der Diagonalen AC? Begründen Sie.

2 *Punkte und Vektoren im Spat*

a) Begründen Sie, dass sich alle Eckpunkte des Spates mithilfe des Punktes A und den drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ darstellen lassen.

b) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AM}$ mithilfe der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aus.

c) Wo liegen die Punkte P und Q, für die gilt:
$\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$ und $\vec{q} = \vec{e} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$?



3 *Geraden*

Die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

a) Benennen Sie am Beispiel von g die Bestandteile der Parametergleichung einer Geraden.

b) Bestimmen Sie die Lage der Geraden zueinander. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

c) Die Gerade g wird in der Weise parallel verschoben, dass sie durch den Ursprung verläuft. Geben Sie die Geradengleichung der entstehenden Geraden g′ an.

d) Geben Sie die Gleichung einer Geraden k an, die sowohl g als auch g′ schneidet.

4 *Lagebeziehungen von Geraden*

Geben Sie die Parameterdarstellung einer Geraden an, die zur Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ …

a) … parallel ist.

b) … windschief ist.

c) … genau einen Schnittpunkt hat.

Geben Sie jeweils eine Begründung, wie Sie vorgegangen sind.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Flugzeuge

Für die beiden folgenden Aufgaben gilt:

- Die Koordinatenachsen haben folgende Bedeutung: die x-Achse zeigt nach Süden, die y-Achse nach Osten, die z-Achse in die Höhe.
- Bodenpunkte haben die z-Koordinate 0. Der Ursprung O ist ein fest gewählter Punkt auf dem Boden.
- Die Längeneinheit auf allen Achsen beträgt 1 km.
- Der Parameter t gibt die Zeit in Minuten an.

5 *Lagebeschreibungen von Punkten, geradlinige Flugabschnitte*

a) Aus den Koordinaten eines Punktes kann man die Höhe über dem Ursprung O und die Änderung der Himmelsrichtungen in Bezug auf O ablesen.

Ordnen Sie die Punkte A = (5 | –3 | 0,5), B = (5 | 3 | 0), C = (–5 | –3 | 0,5) und D = (–5 | 3 | 0) den folgenden Lagebeschreibungen zu:

(I) Der Punkt liegt in 500 m Höhe, 5 km nördlich und 3 km westlich von O.

(II) Der Punkt liegt auf dem Boden, 5 km südlich und 3 km östlich von O.

(III) Der Punkt liegt auf dem Boden, 5 km nördlich und 3 km östlich von O.

(IV) Der Punkt liegt in 500 m Höhe, 5 km südlich und 3 km westlich von O.

b) Eine geradlinige Strecke der Flugbahn eines Flugzeugs, auf der die Punkte P und Q liegen, kann beschrieben werden durch s: $\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})$ mit $0 \le a \le t \le b$.

Bestimmen Sie für P = (5 | 0 | 10), Q = (20 | 0 | 30), a = 0 und b = 4 die Flugroute, den Anfangs- und den Endpunkt der Strecke und die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fluges.

6 *Zwei Flugzeuge – Kollisionsgefahr?*

Zwei Flugzeuge befinden sich zwischen 8.00 Uhr und 8.05 Uhr auf folgenden Bahnen:

Flugzeug 1: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 5$; Flugzeug 2: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 34 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 5$.

a) Beschreiben Sie für beide Flugzeuge, in welche Himmelsrichtung sie fliegen und ob sie steigen, sinken oder auf gleicher Höhe fliegen.

b) Das sinkende Flugzeug ändert seinen Kurs bis zur Landung nicht mehr. Auf welchem Punkt wird es aufsetzen?

c) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit sind beide Flugzeuge im untersuchten Zeitraum geflogen?

d) Besteht eine Kollisionsgefahr der beiden Flugzeuge im beobachteten Zeitraum?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 3

1 *Lagebeziehungen von Gerade und Ebene*

Geben Sie jeweils eine Gerade an, die die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

a) schneidet. b) zu E parallel ist. c) in E liegt.

2 *Spurpunkte von Geraden*

Bestimmen Sie jeweils die Durchstoßpunkte der Geraden g durch die Koordinatenebenen und beschreiben Sie die Lage der Geraden.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

3 *Spurpunkte von Ebenen*

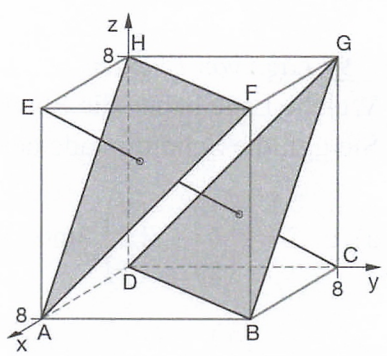
Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch die Ebene.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

c) Gibt es eine Ebene, die keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen hat?

4 *Raumdiagonale*

Im Würfel mit der Kantenlänge 8 ist A = (8|0|0), C = (0|8|0) und H = (0|0|8).
In welchen Punkten schneidet die Raumdiagonale CE die eingezeichneten Ebenen durch AFH und DBG?



5 *Lage von Geraden*

Welche Lage haben die Geraden zueinander?

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

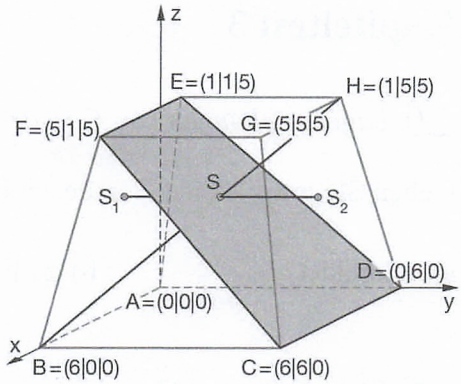
6 *Pyramidenstumpf*

a) In welchem Punkt S schneidet die Gerade BH das Trapez CDEF?

b) Betrachten Sie die Gerade, die parallel zur Geraden FG durch S geht, und berechnen Sie die Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 mit den Trapezen ABFE bzw. CDHG.

c) Liegt der Punkt S auf der Geraden EC?

d) Liegen die Punkte S_1 und S_2 auf der Ebene CEH?



7 *Gerade und Strecke*

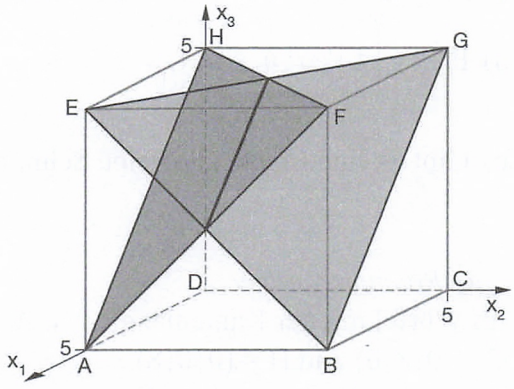
Schneidet die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ die Gerade durch die Punkte A und B?

a) A = (0|2|4) und B = (1|3|5)

b) A = (–1|2|1) und B = (1|2|2)

8 *Schnittgerade*

Geben Sie die Ebenen AFH und BEG an und bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen AFH und BEG.



9 *Lage von Ebenen*

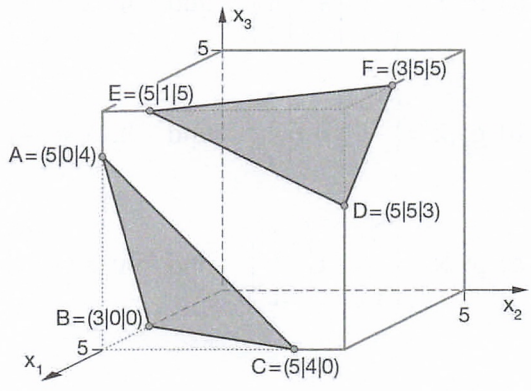
Welche Lage haben die Ebenen zueinander? Geben Sie ggf. die Schnittgerade der beiden Ebenen an.

a) $E: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$

10 *Ebenen im Würfel*

Am Würfel mit der Kantenlänge 5 wurden Ecken abgeschnitten. Dadurch sind zwei Schnittflächen entstanden.
Schneiden sich die beiden Ebenen, die durch die Schnittflächen beschrieben werden?

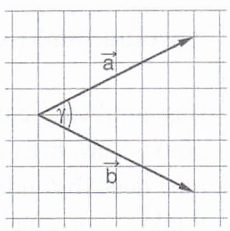


© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Skalarprodukt und Messen

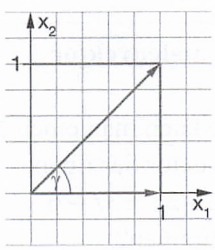
Winkel

Winkel zwischen zwei Vektoren



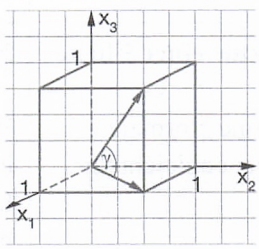
$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\gamma = 45°$

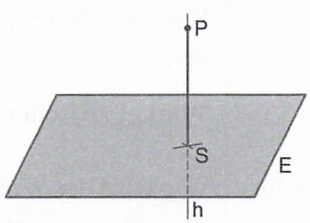


$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$\gamma \approx 35{,}3°$

Abstände

Abstand Punkt – Ebene



Vorgehen

(1) Hilfsgerade h bestimmen, die senkrecht zu E ist und P enthält

(2) Schnittpunkt S von h und E bestimmen

(3) Abstand der Punkte P und S bestimmen

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Skalarprodukt und Messen – Übersicht

Inhalte zum Skalarprodukt und Messen
Auf dieser Seite finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Inhalte (Begriffe und Verfahren) zum Skalarprodukt und Messen.

Skalarprodukt Was bedeutet es geometrisch, wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren null ist?	**Winkel zwischen zwei Vektoren** Wie wird der Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmt?	**Koordinatenform einer Ebene** Wie findet man mit der Koordinatenform einen Punkt einer Ebene?
Normalenvektor einer Ebene Wodurch ist eine Normalenform einer Ebenengleichung festgelegt?	**Normalenvektor** Wie kann man einen Normalenvektor der Ebene E: $x - 2y + 3z = 6$ bestimmen?	**Abstand Punkt-Gerade** Beschreiben Sie das Lotfußpunkt-Verfahren zum Bestimmen des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.
Senkrechte Vektoren zu einer Ebene Zu welchen Vektoren einer Ebene steht ein Normalenvektor senkrecht?	**Abstand zwischen parallelen Geraden** Auf welches Abstandsproblem lässt sich die Bestimmung des Abstandes einer Geraden zu einer parallelen Geraden zurückführen?	**Winkel zwischen Geraden** Wie wird der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden bestimmt?
Abstand Punkt-Ebene Beschreiben Sie das Lotfußpunkt-Verfahren zum Bestimmen des Abstandes eines Punktes von einer Ebene.	**Ebene in Normalenform** Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{x} - \vec{q}$ in E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{q}) = 0$?	**Anzahl von Normalenvektoren** Gibt es zu jeder Ebene einen Normalenvektor? Wie viele Normalenvektoren einer Ebene gibt es?
Vektorprodukt Was gibt das Vektorprodukt zweier Vektoren an?	**Kommutativgesetze** Gilt das Kommutativgesetz für das Skalarprodukt? Gilt es auch für das Vektorprodukt?	**Winkel zwischen Ebenen** Wie wird der Winkel zwischen zwei Ebenen bestimmt?

Beantworten Sie kurz die Fragen zu den Begriffen und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Skalarprodukt

1 *Skalarprodukt*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

b) Sind zwei der Vektoren orthogonal zueinander?

c) Ändern Sie eine Koordinate von $\vec{a}$ so ab, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ orthogonal sind.

2 *Vektor oder Zahl?*

Berechnen Sie für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ die folgenden Ausdrücke.

I: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ II: $((\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}$ III: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$

3 *Winkel zwischen Vektoren*

Bestimmen Sie die Winkel, die je zwei der folgenden Vektoren miteinander bilden:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{z} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4 *Orthogonale Geraden*

Ergänzen Sie die fehlenden Eintragungen in den Geradengleichungen, sodass sowohl h als auch k orthogonal zu g ist.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \square \\ 6 \end{pmatrix}$; k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \square \\ -4 \\ \square \end{pmatrix}$

5 *Normalenvektoren*

Gegeben sind die Ebenen E_1: $8x - 4y = 12$, E_2: $5x + y - z = 10$ und E_3: $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie zu jeder der Ebenen einen Normalenvektor an.

b) Welche Lagebeziehungen haben die Ebenen zueinander?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Winkel

1 *Winkel zwischen Vektoren*

a) Berechnen Sie den Winkel α zwischen $\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ sowie den Winkel β zwischen $\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

b) Die Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ kann man ohne Taschenrechner bestimmen. Geben Sie die entsprechenden Winkel an.

2 *Winkel zwischen Geraden*

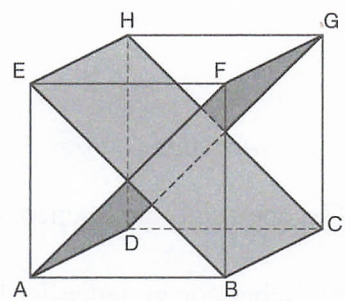
Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ und k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix}$ sowie die Winkel $\alpha = 81{,}67°$, $\beta = 29{,}65°$ und $\gamma = 52{,}02°$.
Zu welchem Geradenpaar gehört welcher Winkel?

3 *Winkel zwischen Gerade und Ebene*

Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Gerade AB durch die Punkte A = (2|0|–1) und B = (0|4|4) und der Ebene E: $3x - 4y + 3z = 0$.

4 *Winkel im Quader*

Welchen Winkel bilden die Rechteckflächen HEBC und DAFG, wenn die Punkte A = (2|0|0), B = (2|4|0), C = (0|4|0), D = (0|0|0), E = (2|0|3), F = (2|4|3), G = (0|4|3) und H = (0|0|3) gegeben sind?



5 *Winkel und Vielfache von Vektoren*

Anschaulich ist es klar: Wenn man zwei Vektoren verlängert oder verkürzt, aber die Richtung beibehält, ändert sich der Winkel zwischen ihnen nicht. Überprüfen Sie dies an den Vektorpaaren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $m\vec{a} = \begin{pmatrix}m\\0\\2m\end{pmatrix}$, $n\vec{b} = \begin{pmatrix}2n\\n\\3n\end{pmatrix}$ mit $m, n \neq 0$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Abstände

1 *Streckenzüge*

Gegeben sind die Punkte P = (2|4|0), Q = (1|–2|5) und R = (0|2|–1).
Welcher Streckenzug ist länger: PQR oder PRQ?

2 *Parallele Geraden*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g und h parallel sind.

b) Geben Sie die Gleichung einer Geraden m an, die parallel zu k ist und h schneidet.

3 *Windschiefe Geraden*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand von g und h.

4 *Abstand von Ebenen*

Bestimmen Sie den Abstand der parallelen Ebenen

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E_2: $\vec{x} = r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 *Abstand Gerade-Ebene*

Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und k: $\vec{x} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ zur Ebene

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

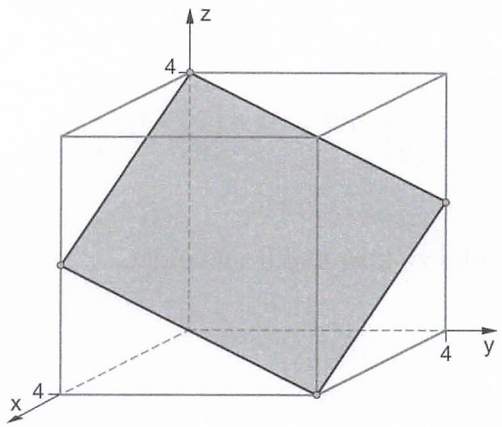
Welche Gerade ist orthogonal zu E, welche liegt in E, welche ist parallel zu E?

ISBN: 978-3-507-85586-1

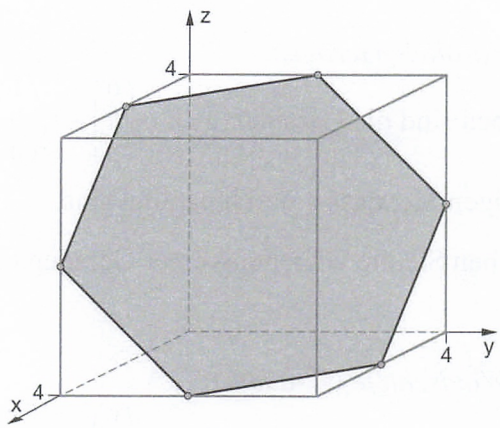
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfelschnitte

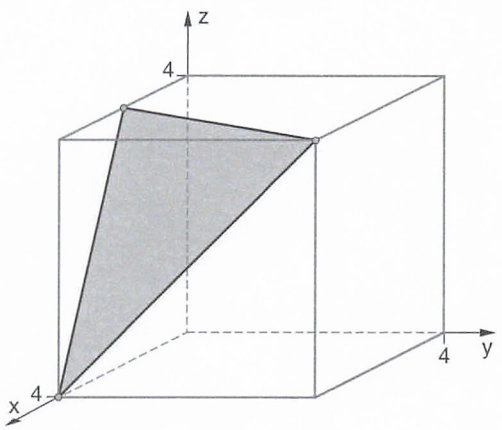
Ein Würfel mit der Kantenlänge 4, der einen Eckpunkt im Ursprung hat, wird durch vier verschiedene Ebenen geschnitten. Die markierten Punkte sind entweder Eckpunkte oder Mittelpunkte der entsprechenden Kanten. Sie gehören in allen vier Fällen zur dargestellten Ebene.



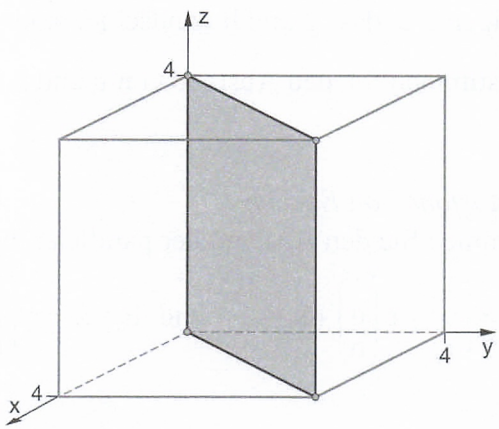
Ebene 1



Ebene 2



Ebene 3



Ebene 4

a) Ordnen Sie die Normalenvektoren den entsprechenden Ebenen zu.

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Ordnen Sie die Ebenengleichungen in Normalenform den entsprechenden Ebenen zu.

Normalenform 1: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Normalenform 2: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Normalenform 3: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Normalenform 4: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geradenscharen

1 *Geradenschar 1*

Die Geradenschar g_a wird durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.

a) Warum kann es keine parallelen Schargeraden geben?

b) Welche Gerade der Schar enthält den Punkt $P = (4|2|-1)$?

c) Gibt es eine Schargerade, die in der Ebene E_1: $5x_1 - x_2 + 2x_3 = -8$ liegt?

d) Gibt es eine Schargerade, die parallel zu der Ebene E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft?

e) Welche Schargerade schneidet die x_1-Achse? Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt?

f) Prüfen Sie, ob die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zur Schar g_a gehört.

g) Begründen Sie, dass es keine Gerade der Schar gibt, die zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft.

2 *Geradenschar 2*

Die Geradenschar g_a wird durch die Gleichung g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+a \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Weiterhin ist die Ebene E: $2x_1 + x_3 - 3 = 0$ gegeben.

a) Welche Lagebeziehungen bestehen zwischen den Schargeraden g_a und der Ebene E? Bestimmen Sie gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte S_a der Geradenschar g_a mit der Ebene E.

b) Welche Schargeraden stehen senkrecht zur Ebene E?

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S* der Geraden g_a mit der Geraden h_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+a \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren von g_a und h_a ist.

e) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_a, die die Geraden g_a und h_a enthält. Welche dieser Scharebenen gehen durch den Ursprung?

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG

Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Ebenenscharen

1 *Ebenenschar 1*

Die Gleichung $2x_1 + ax_2 - 3x_3 = 1$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschreibt die Ebenenschar E_a.

a) Gehört die Ebene $E: 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2$ zu der Schar E_a?

b) Welche Ebene der Schar E_a enthält den Punkt $P = (3|-2|5)$?

c) Begründen Sie, dass der Punkt $Q = (5|0|3)$ zu allen Ebenen der Schar E_a gehört.

d) Geben Sie einen weiteren Punkt R an, der zu allen Ebenen der Schar E_a gehört.

e) Gibt es eine Ebene der Schar E_a, die parallel zu der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist?

f) Weisen Sie nach, dass die Ebenenschar E_a auch durch die Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann.

g) Begründen Sie, dass alle Ebenen der Schar E_a sich in der x_1x_3-Ebene schneiden.

2 *Ebenenschar 2*

Die Ebenenschar E_a wird durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.

a) Begründen Sie, dass alle Ebenen der Schar E_a parallel verlaufen.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebenenschar E_a.

c) Welche Ebene der Schar E_a enthält den Koordinatenursprung?

d) Welche Ebene der Schar E_a enthält die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

e) Welche Ebene der Schar E_a schneidet die x_1-Achse an der Stelle 4?

f) Welchen Abstand haben die Ebenen E_9 und E_{15} der Schar E_a voneinander?

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Multiple Choice

a) Welche Ergänzungen sind jeweils wahr? Kreuzen Sie die richtigen Antworten an; es können auch mehrere Antworten richtig sein.

(A)
Wenn im Zähler der Formel $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ das Skalarprodukt von zwei Vektoren negativ ist, …

a) … muss mindestens eine der Koordinaten negativ sein. ☐
b) … bilden sie einen Winkel < 90°. ☐
c) … bilden sie einen Winkel > 90°. ☐
d) … können nicht alle Koordinaten negativ sein. ☐

(B)
Wenn zwei Ebenen E_1 und E_2 einen rechten Winkel miteinander bilden, dann …

a) … sind je zwei Geraden $g_1 \in E_1$ und $g_2 \in E_2$ orthogonal. ☐
b) … sind zwei Geraden $g_1 \in E_1$ und $g_2 \in E_2$ nur dann orthogonal, wenn eine orthogonal zur Schnittgeraden der Ebenen ist. ☐
c) … gibt es Geraden, die zu beiden Ebenen einen Abstand > 0 haben. ☐

(C)
Ein Gleichungssystem mit einer zugehörigen Matrix der Form $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \end{array}\right)$ wird gebraucht, um …

a) … den Schnittpunkt von drei Geraden zu bestimmen. ☐
b) … den Schnittpunkt von einer Ebene und einer Geraden zu bestimmen. ☐
c) … die Schnittgerade von zwei Ebenen zu bestimmen. ☐

(D)
Wenn für den Schnittwinkel von zwei Vektoren gilt: $\cos(\alpha) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, kann man schließen, dass …

a) … $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind. ☐
b) … $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beide die Länge 1 haben. ☐
c) … einer der Vektoren eine Länge ≤ 1 und der andere eine Länge ≥ 1 haben muss. ☐

b) Welche Ebene ist vom Ursprung am weitesten entfernt?

(A) ☐ E_1: $x + y + z = 1$
(B) ☐ E_2: $2x + y - z = 1$
(C) ☐ E_3: $-2x + 2y - z = 1$
(D) ☐ E_4: $3x + 4y + z = 1$

c) Welcher Vektor steht orthogonal zur Ebene E: $3x - 2y + z = 5$?

(A) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐
(B) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐
(C) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐
(D) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Skalarprodukt

1 *Skalarprodukt*

Wahr oder falsch?

Für zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

I: Wenn alle Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer 0 sind, können $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal sein.

II: Wenn alle Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer oder gleich 0 sind, können $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal sein.

III: Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinander sind, können $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal sein.

IV: Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind, dann gilt: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2 *Vektor oder Zahl?*

a) Stellen die Ausdrücke A_1: $((\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}$, A_2: $((\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}$ und A_3: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$ Zahlen oder Vektoren dar?

b) Gegeben sind die Terme I: $(\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{c}$, II: $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$ und III: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

b_1) Begründen Sie, dass I, II und III Vektoren darstellen.

b_2) Zwei der drei Vektoren sind immer gleich. Welche sind es?

b_3) Geben Sie eine notwendige Voraussetzung dafür an, dass auch zwei andere Vektoren gleich sein können.

3 *Linearkombinationen*

Für drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Ergänzen Sie durch $=$, $<$ oder $\leq$:

I: Falls $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind, gilt: $|\vec{a}| \square |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

II: Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise linear unabhängig sind, gilt: $|\vec{a}| \square |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

III: Falls $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{c} = \vec{0}$, gilt: $|\vec{a}| \square |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

4 *Gerade und Ebene*

Wie kann man prüfen, ob eine Gerade g orthogonal zu einer Ebene E ist, wenn E

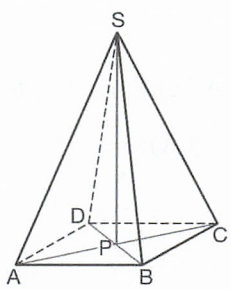
a) in Punkt-Richtungs-Form,

b) in Koordinatenform gegeben ist?

5 *Lot von einem Punkt auf eine Ebene*

a) In einer Pyramide soll das Lot von einem Punkt P des Pyramidenbodens auf die Seitenfläche BCS gefällt werden. Beschreiben Sie das Vorgehen.

b) Nun soll das Lot vom Punkt $Q = (q_1 | q_2 | q_3)$ der Seitenfläche BCS auf den Boden der Pyramide gefällt werden. Geben Sie die Koordinaten des Fußpunktes F an.



ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Winkel

1 *Winkel zwischen linear abhängigen Vektoren*

a) Zeigen Sie, dass die Berechnung des Winkels zwischen zwei linear abhängigen und gleichgerichteten Vektoren zum Ergebnis $\alpha = 0°$ führt.

b) Zeigen Sie, dass die Berechnung des Winkels zwischen zwei linear abhängigen und entgegen gerichteten Vektoren zum Ergebnis $\alpha = 180°$ führt.

2 *Wahr oder falsch?*

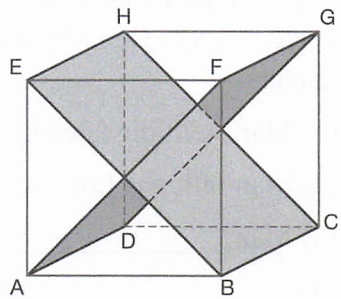
I: Der Winkel zwischen der z-Achse und einem Vektor $\vec{a}$ der xy-Ebene beträgt stets 90°.

II: Der Winkel zwischen der z-Achse und einem Vektor $\vec{a}$ der xy-Ebene beträgt nur dann 90°, wenn $\vec{a}$ parallel zur x-Achse oder zur y-Achse ist.

3 *Ebene im Quader*

Ergänzen Sie:

Die Ebenen EBCH und AFGD sind genau dann orthogonal, wenn die Rechtecksfläche A _ _ _ ein _____ ist.



Begründung:

Der Winkel zwischen den Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen den Geraden _____ und _____. Diese sind genau dann orthogonal, wenn _____.

4 *Gleiche Koordinaten*

Es wird behauptet: Wenn drei Vektoren die gleichen Koordinaten haben – in unterschiedlicher Reihenfolge –, dann sind die Winkel, die je zwei dieser Vektoren bilden, gleich.

a) Beurteilen Sie diese Begründung und stellen Sie eine Vermutung auf.

b) Überprüfen Sie Ihre Vermutung am Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5 *Gerade und Ebene*

a) Wo steckt bei der folgenden Beschreibung der Fehler?

> Verfahren zur Berechnung des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebene E:
> - Man bestimmt den Schnittpunkt S von g und E.
> - Man bestimmt eine Gerade h, die S enthält und in E liegt.
> - Der Winkel zwischen g und h ist der gesuchte Winkel.

b) Vergleichen Sie den mit dem Verfahren in Teil a) bestimmten Winkel β mit dem gesuchten Winkel α. Welche Fälle sind möglich?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Abstände

1 *Geraden in Koordinatenform*

a) Wie kann man zwei Ebenen ansehen, ob sie parallel sind, wenn man ihre Koordinatenform $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ und $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ kennt?

b) Wann sind die beiden Ebenen zusätzlich identisch?

2 *Wahr oder falsch?*

I: Die Ebene $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ hat den Schnittpunkt $S_3 = (0|0|d_1)$ mit der z-Achse.

II: Die Ebene $E_2: a_2x + b_2y + z = d_2$ hat den Schnittpunkt $S_3 = (0|0|d_2)$ mit der z-Achse.

III: Die Ebenen $E_3: a_3x + b_3y + z = d_3$ und $E_4: a_4x + b_4y + z = d_4$ haben den Abstand $d = |d_3 - d_4|$.

3 *Windschiefe Geraden*

Ergänzen Sie: Den Abstand zweier windschiefer Geraden g und h bestimmt man folgendermaßen:

(1) Man stellt die Gleichung der Ebene E auf, die g enthält und _____.

(2) Man fällt das Lot von _____.

(3) Man _____.

(4) _____ ist der gesuchte Abstand.

4 *Ebene für zwei Geraden gesucht*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \vec{a}_1 + t_1\vec{u}_1$ und h: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t_2\vec{u}_2$. Ordnen Sie die Aussagen beider Tabellen einander zu.

(I)	g und h sind identisch.
(II)	g und h sind parallel.
(III)	g und h haben genau einen Schnittpunkt.
(IV)	g und h sind windschief.

Es gibt unendlich viele Ebenen, die g und h enthalten.	(A)
Es gibt keine Ebene, die g und h enthält.	(B)
Es gibt genau eine Ebene, die g und h enthält.	(C)

5 *Parallele Geraden*

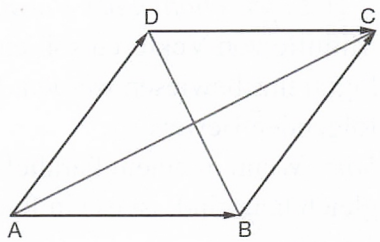
Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden soll bestimmt werden. Kann das gleiche Verfahren angewendet werden wie bei windschiefen Geraden?

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geometrische Objekte

1 *Eigenschaften der Raute*



Mithilfe von Vektoren soll eine Eigenschaft der Raute bewiesen werden. Vervollständigen Sie den folgenden Beweis.

Satz: In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Beweis: Seien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}_1$ und $\overrightarrow{DB} = \vec{d}_2$.

Dann gilt: $\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{d}_2 =$ _____.

Daraus folgt: $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 =$ _____. (1)

Weiter gilt: $\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2$ (2) und $|\vec{p}| =$ _____. (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt: _____.

Also gilt: Die Diagonalen _____.

2 *Quadratische Pyramide*

Eine quadratische regelmäßige Pyramide hat die Grundkante $a = 3$ und die Höhe $h = 6$.
Die Eckpunkte der Grundfläche sind: $A = (3|0|0)$, $B = (3|3|0)$, $C = (0|3|0)$ und $D = (0|0|0)$.

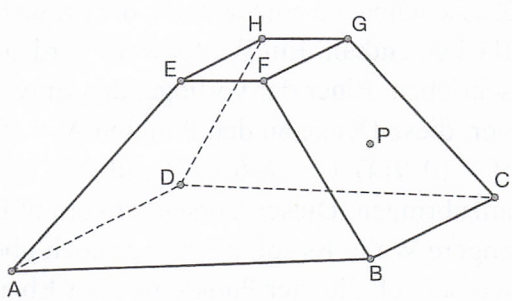
a) Bestätigen Sie, dass $E: 4x + z = 12$ eine Koordinatenform der Ebene ABS ist und geben Sie eine Koordinatenform der Ebene BCS an.

b) Welchen Winkel bilden die Seitenflächen mit dem Boden?

c) Welchen Winkel bilden benachbarte Seitenflächen miteinander?

3 *Dach einer Villa*

In der nebenstehenden Abbildung ist das geplante Dach einer Stadtvilla zu sehen. Die Eckpunkte im Entwurf sind:
$A = (4|-4|0)$, $B = (3|4|0)$,
$C = (-3|4|0)$, $D = (-4|-4|0)$,
$E = (2|-1|4)$, $F = (2|1|4)$,
$G = (-2|1|4)$ und $H = (-2|-1|4)$.



a) Welche Form hat die Grundfläche ABCD?

b) Wie lang ist die Kante $\overline{AE}$?

c) Bestätigen Sie, dass die Fläche S = BCGF in der Ebene $E: 4y + 3z = 16$ liegt.

d) Vom Boden soll ein zu S = BCGF orthogonaler Stützpfeiler errichtet werden, der S im Punkt $P = (0|2{,}5|2)$ trifft. Welcher Punkt auf dem Boden ist der zu dem Stützpfeiler zugehörige Fußpunkt?

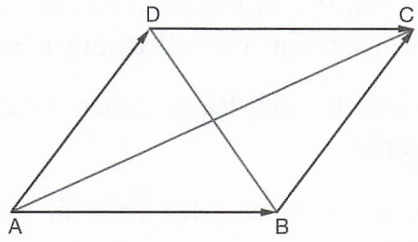
ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vermischte Aufgaben

1 *Eigenschaften des Parallelogramms*

Mithilfe von Vektoren soll eine Eigenschaft des Parallelogramms bewiesen werden. Vervollständigen Sie den folgenden Beweis.



Satz: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, ist es ein Rechteck.

Beweis:

Seien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}_1$ und $\overrightarrow{DB} = \vec{d}_2$.

Dann gilt: $\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{d}_2$ = _____. Die Diagonalen sind gleich lang. Also gilt:

_____.

2 *Quadratische Pyramide: Grundseite bleibt – Höhe verändert sich*

Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a, der Höhe h und dem Winkel α als Winkel zwischen benachbarten Seitenflächen.

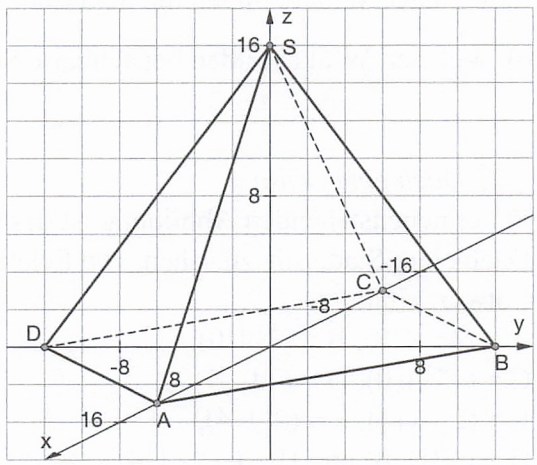
a) Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, ob die Seitenflächen spitze, rechte oder stumpfe Winkel miteinander bilden.

b) Wie ändert sich α, wenn h größer wird?

c) Kann $\alpha = 180°$ oder $\alpha = 90°$ betragen? Welche Werte kann α annehmen? Wie verhält sich jeweils die Höhe h in den Grenzlagen von α?

3 *Theater*

Ein modernes Theater hat die Form einer quadratischen Pyramide. Eine maßstabgetreue Darstellung ist möglich mit A = (12|0|0), B = (0|12|0), C = (–12|0|0), D = (0|–12|0) und S = (0|0|16). Es ist geplant, zur nächsten Saison eine Zwischendecke einzuziehen, die große Spiegelflächen enthält. Ein Wettbewerb wird ausgeschrieben. Einer der vorliegenden Entwürfe sieht vor, diese Decke an den Punkten A′ = (6|0|8), B′ = (0|9|4), C′ = (–6|0|8) und D′ = (0|–3|12) anzubringen. Dieser Vorschlag kommt in die engere Wahl. Es soll allerdings noch überprüft werden, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.



a) Zeichnen Sie die vorgeschlagene Decke in die Grafik ein.

b) Zeigen Sie, dass das Viereck A′B′C′D′ nicht eben ist.

c) Eine Änderung von D′ zu D″ = (0|–4,5|10) wird vorgeschlagen. Tragen Sie die Änderung in die Grafik ein. Ist das Problem nun behoben?

d) Welchen Winkel bildet die Deckenfläche E = A′B′C′D″ mit der Bodenfläche?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Motorflugzeug

Anflugstrecke eines Motorflugzeugs

Ein Motorflugzeug ist auf dem Rückflug. Der Landeanflug beginnt 20 km südlich und 30 km östlich vom Landeplatz in 5 km Höhe. Wegen eines Sperrgebietes kann es den Landeplatz nicht direkt anfliegen. Um den Umweg nicht zu groß werden zu lassen, beschließt der Pilot, an zwei Stellen den Kurs zu ändern.
In einem Koordinatensystem gibt die x-Achse die Südrichtung an, die y-Achse die Ostrichtung und die z-Achse die Höhe. Die Längeneinheit beträgt 1 km.
Der Landeplatz hat die Koordinaten $L = (0|0|0)$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Anfangspunktes A des Landeanflugs an.

b) Das Sperrgebiet ist ein Rechteck mit den Eckpunkten $S_1 = (18|14|0)$, $S_2 = (18|20|0)$, $S_3 = (7|20|0)$ und $S_4 = (7|14|0)$.
Beschreiben Sie das Sperrgebiet durch die Einschränkung der Koordinaten, indem Sie ergänzen:

Das Sperrgebiet besteht aus allen Punkten, für die gilt: $7 \leq x \leq$ ____ und _____.

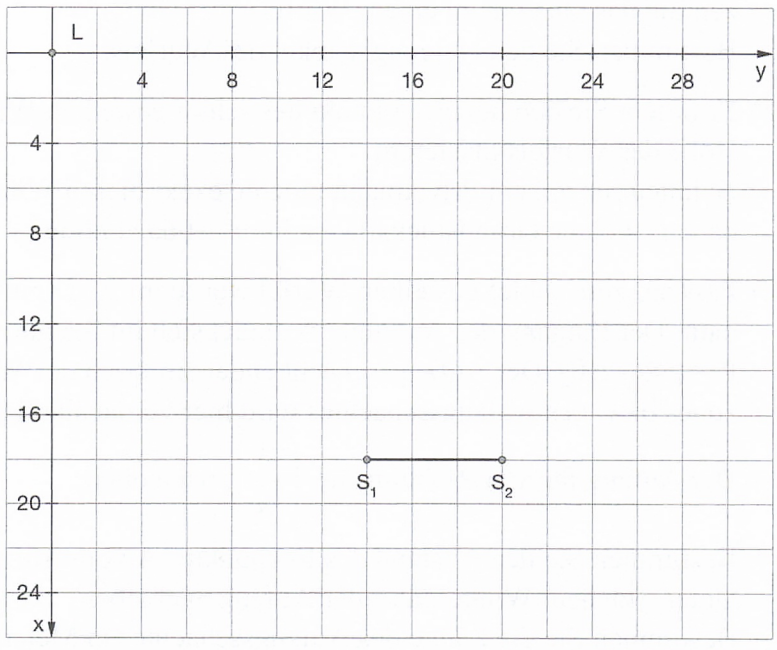
c) Die beiden Punkte, an denen der Kurs geändert wird, sind $B = (8|24|3)$ und $C = (4|20|2)$. Zeigen Sie, dass das Sperrgebiet nicht überflogen wird.

d) Zeichnen Sie die Flugroute und das Sperrgebiet in den untenstehenden Grundriss ein.

e) Berechnen Sie die Länge der von A bis L geflogenen Strecke. Wie groß ist der Umweg wegen des Sperrgebietes?

f) Um welche Winkel weicht der Pilot an den beiden Punkten B und C vom vorigen Kurs ab?

g) In welchem Winkel zum Boden fliegt das Flugzeug auf der Strecke von C bis L?

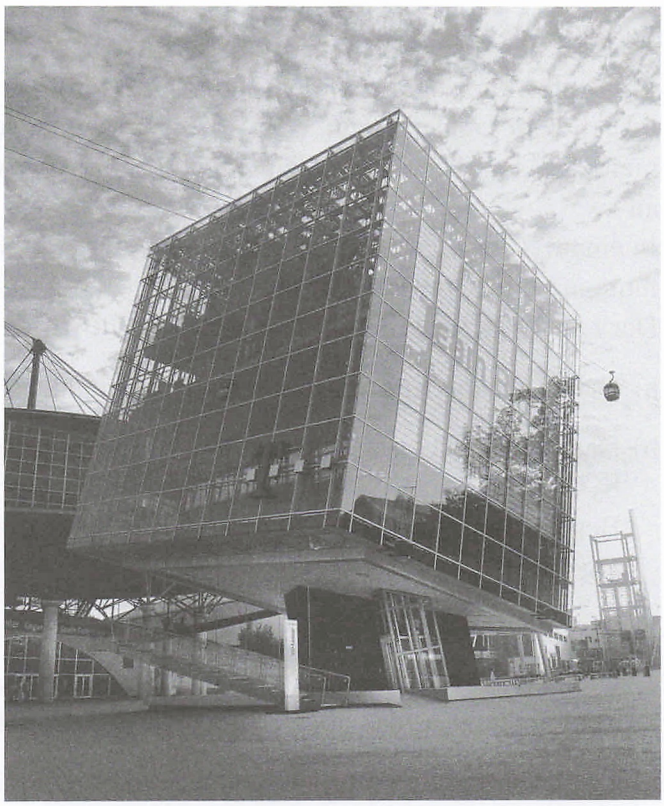


ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Der schief gestellte Würfel im Raum

Die Expo 2000 fand in Hannover statt. Die Deutsche Telekom präsentierte sich dort mit einem schief gestellten Würfel, dem sogenannten „T-Digit".
Ein Koordinatensystem wird so festgelegt, dass der Ursprung senkrecht unter dem tiefsten Punkt des Würfels liegt. Die Erdoberfläche (die Erdkrümmung wird hier vernachlässigt) stellt die x_1x_2-Ebene dar, die x_3-Achse zeigt senkrecht nach oben.
Der tiefste Punkt des Würfels wird festgelegt mit A = (0|0|3). Der Würfel ist so geneigt, dass der dem Punkt A gegenüberliegende Punkt in der Grundfläche C = (–14|–14|19) ist. Ein weiterer Eckpunkt der Grundfläche des Würfels ist B = (2|–16|11).
Allgemein gilt: 1 LE $\triangleq$ 0,5 m.



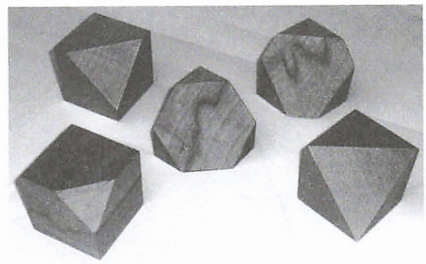
a) Zeigen Sie, dass die Punkte wirklich zu einem Würfel ergänzt werden können.
Berechnen Sie die Koordinaten des fehlenden Punktes D des Quadrats ABCD und ergänzen Sie das Quadrat zu einem Würfel.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Würfels.

b) Ermitteln Sie den höchsten Punkt des schief gestellten Würfels und bestimmen Sie die Höhe des Würfels in Metern.
Nehmen Sie an, ein Privatmann möchte exakt diesen Würfel auf seinem Grundstück nachbauen: Welche Grundstücksfläche in m^2 ist dazu nötig?

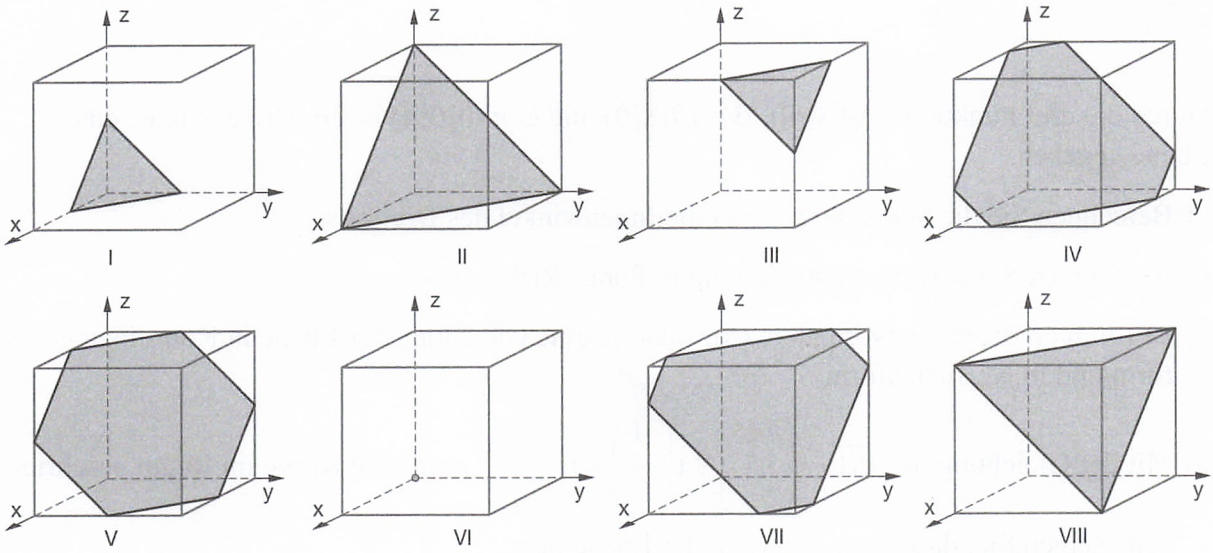
c) Passend zum schief gestellten Würfel wurde im „T-Digit" ein Aufzug in Schräglage eingebaut. Der Eingang des Aufzuges befindet sich im Ständer des „T-Digit" im Punkt P = (–2|–2|0). Der Aufzugsschacht endet am Dach des Würfels (die Ausbreitung des Aufzuges bzw. des Aufzugsschachtes wird hier vernachlässigt).
Der Aufzug fährt in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ nach oben.
Bestimmen Sie den Abstand des Eckpunktes A vom Aufzug in Metern.
Unter welchem Winkel fährt der Aufzug nach oben?
Bestimmen Sie die Länge des Aufzugsschachtes in Metern.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfelschnitte



Aus Holzwürfeln bietet eine Schreinerei kunstvolle Schnittmodelle (siehe Foto) an, die entstehen, wenn der Würfel senkrecht zu einer seiner Raumdiagonalen mit einem ebenen Schnitt zerteilt wird. Die Abbildungen I bis VIII zeigen acht unterschiedliche Schnittfiguren durch einen Würfel der Kantenlänge 1.
In allen Abbildungen sehen Sie die Wahl des Koordinatensystems.



Bemerkungen: Die Würfelschnitte in den Abbildungen I, III und V sind genau durch die jeweiligen Kantenmitten des Würfels durchgeführt. Bei den Schnitten IV und VII werden die betroffenen Kanten im Verhältnis 1:2 durch den Schnitt geteilt.

a) Geben Sie die Abfolge der Schnitte I bis VIII an, wenn diese der Reihe nach von der Würfelecke im Koordinatenursprung bis zur vorderen rechten oberen Würfelecke gewandert sind. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die „Metamorphose" der Schnittflächenfigur.

b) Für drei der acht Würfelschnitte sind bereits entsprechende Ebenengleichungen angegeben:

$E_A: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad E_D: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\qquad E_C: x + y + z = 2$

Benennen Sie die Art der Ebenengleichung und ordnen Sie diese jeweils der passenden Schnittebene aus den Abbildungen I bis VIII zu.

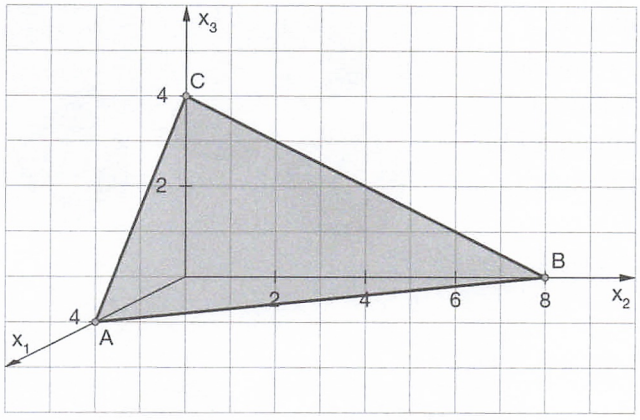
c) Stellen Sie zu zwei weiteren Schnittebenen Ihrer Wahl jeweils eine passende Ebenengleichung auf.

d) Zeigen Sie, dass sich alle Schnittebenen durch die Ebenenschar $E_k: x + y + z = k$ beschreiben lassen. Ermitteln Sie hierzu jeweils den passenden Parameter k.

e) Ermitteln Sie den Abstand der Schnittebenen aus den Abbildungen II und VIII und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kurven im Raum



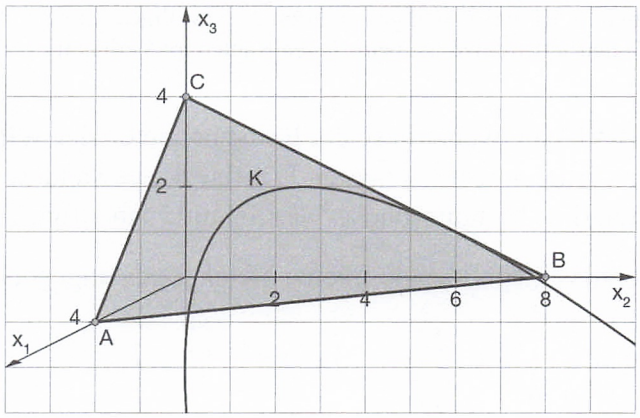
Durch die drei Punkte A = (4|0|0), B = (0|8|0) und C = (0|0|4) ist ein Dreieck bzw. eine Ebene gegeben.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Innenwinkel des Dreiecks.

b) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Punkt-Richtungs-Form.

c) Bestimmen Sie einen Normalenvektor und je eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform und in Normalenform.

d) Mit der Gleichung $K: \overrightarrow{P(t)} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ wird eine Kurve im Raum beschrieben. Zeigen Sie, dass diese Kurve in der Ebene liegt.



e) Begründen Sie, dass alle Punkte der Kurve keine negativen x_1-Koordinaten haben können.

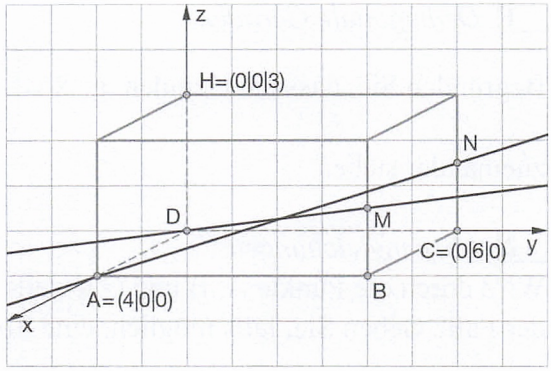
f) Bestimmen Sie den höchsten Punkt der Kurve und den Punkt, in dem die Kurve die x_2x_3-Ebene berührt.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up 1

1 *Geraden im Quader*

Im Quader werden Geraden durch die Mittelpunkte M und N der dazugehörigen Strecken betrachtet.



a) Welche Lage hat die Gerade durch D und M zur Geraden durch A und N? Begründen Sie geometrisch und überprüfen Sie rechnerisch.

b) Gibt es eine Ebene, die die Punkte A, D, M und N enthält? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

2 *Pyramide*

Die Grundfläche einer dreieckigen Pyramide wird durch die Punkte A = (4|0|0), B = (6|8|1) und C = (1|4|2) sowie durch den Punkt S = (2|2|11) bestimmt.

a) Zeichnen Sie die Pyramide im Koordinatensystem.

b) Wie hoch ist die Pyramide?

3 *Abstand zwischen windschiefen Geraden*

Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$?

4 *Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade*

Welchen Abstand hat die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ von der Ebene

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$?

5 *Schnitt von zwei Ebenen*

Gegeben sind die beiden Ebenen E: $2x + y - 2z = 4$ und F: $2y = 8$.

a) Zeichnen Sie die Ebenen in ein Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die Schnittgerade g der beiden Ebenen in das Koordinatensystem und bestimmen Sie eine Geradengleichung der Schnittgeraden.

c) Welchen Schnittwinkel bilden die beiden Ebenen?

d) Bestimmen Sie den Abstand der Schnittgeraden zum Ursprung.

6 *Wo steckt der Fehler?*

$$\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix}$$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up 2

1 *Orthogonale Geraden*

Begründen Sie, dass die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander stehen.

2 *Ebenengleichungen*

Wird durch die Punkte A, B und C jeweils eine Ebene festgelegt? Warum ist dies nicht immer der Fall? Geben Sie, falls möglich, eine Ebenengleichung an.

a) A = (1|2|1); B = (2|2|1); C = (5|2|1)

b) A = (3|–1|2); B = (5|0|3); C = (2|2|2)

c) A = (4|2|1); B = (6|3|2); C = (8|4|3)

d) A = (1|2|–2); B = (2|2|1); C = (2|3|–2)

3 *Geraden im Würfel*

Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte A = (4|0|2) und B = (2|4|4) sowie die Gerade h durch die Punkte P = (0|0|4) und Q = (2|4|0).

a) Zeichnen Sie die Geraden in einen Würfel mit der Kantenlänge 4, der alle drei Koordinatenebenen berührt.

b) Welche der Geraden ist vom Ursprung weiter entfernt? Schätzen und rechnen Sie.

c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

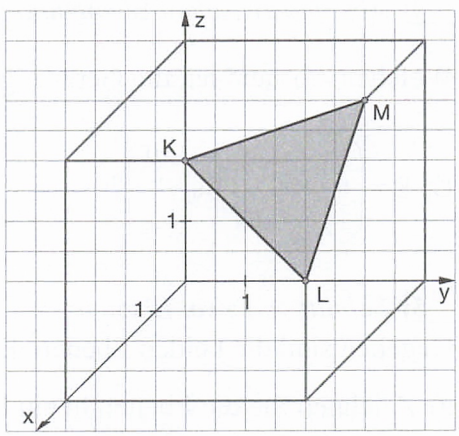
4 *Abgeschnittener Würfel*

a) Welche Fläche des Würfels liegt auf der Ebene E: z = 4?

b) Geben Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform an, in der die rechte Seitenfläche des Würfels liegt.

c) Beschreiben Sie die Ebene, in der die Schnittfläche KLM liegt, als Gleichung in Punkt-Richtungs-Form und in Koordinatenform.

d) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht zur Schnittfläche steht.



5 *Winkel zwischen Geraden*

Welchen Winkel bilden die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

6 *Abstand vom Ursprung*

Welche Ebenen haben den Abstand 3 vom Ursprung?

a) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

b) F: z = 3

c) G: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 1

1 *Winkel zwischen Geraden*

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = t_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = t_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und k: $\vec{x} = t_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Woran kann man erkennen, dass keiner der drei Winkel $\alpha = \sphericalangle(g,h)$, $\beta = \sphericalangle(g,k)$ und $\gamma = \sphericalangle(h,k)$ stumpf ist?

b) Welcher Winkel in Teilaufgabe a) beträgt 90°?

c) Berechnen Sie die beiden anderen Winkel in Teilaufgabe a).

2 *Winkel zwischen Ebenen*

Welchen Winkel bilden die Ebenen E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ und

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ miteinander?

3 *Abstand zwischen Punkt und Ebene*

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene durch A = (2|4|1), B = (0|4|1) und C = (0|4|3) zum Punkt P = (0|0|2).

4 *Abstand zwischen parallelen Geraden*

Welchen Abstand haben die parallelen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$?

5 *Winkel zwischen Seitenflächen einer Pyramide*

Gegeben ist eine regelmäßige quadratische Pyramide mit den Bodenpunkten A = (2|–2|0), B = (2|2|0), C = (–2|2|0) und D = (–2|–2|0) und mit der Höhe h > 0.

a) Bestätigen Sie, dass die Ebene E_1 = ABS die Koordinatenform $hx + 2z = 2h$ und die Ebene E_2 = BCS die Koordinatenform $-hy - 2z = -2h$ hat.

b) Weisen Sie nach, dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen mit wachsender Höhe kleiner wird und stets größer als 90° und kleiner als 180° ist.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 *Untersuchungen am Spat*

Ein Spat hat die Eckpunkte A = (0|0|0), B = (1|6|2), C = (–5|6|3), D = (–6|0|1), E = (–3|2|4), F = (–2|8|6), G = (| |) und H = (| |).

a) Geben Sie die Koordinaten von G und H an und vervollständigen Sie die nebenstehende Grafik.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkel des Parallelogramms ABCD.

c) Bestätigen Sie für die Seitenflächen ABFE und ADHE, dass sie in den Ebenen

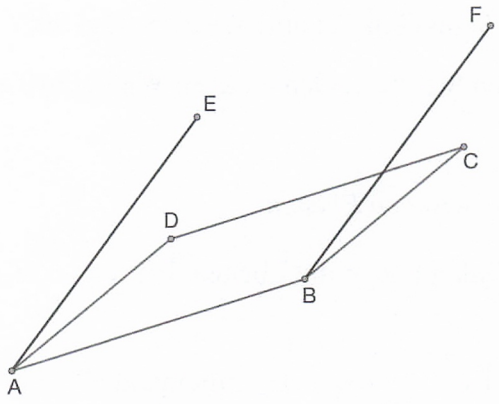
E_1: $2x - y + 2z = 0$

und

E_2: $2x - 21y + 12z = 0$

liegen.

d) Berechnen Sie den Winkel der beiden Seitenflächen aus Teilaufgabe c).



7 *Testflüge*

Zum Testen neu entwickelter Flugzeuge wird ein Testgebiet ausgewiesen. Es ist Teil einer zum Boden geneigten Ebene E.
Ein Koordinatensystem wird so festgelegt, dass die x-Achse nach Süden, die y-Achse nach Osten und die z-Achse in die Höhe zeigt (1 LE $\triangleq$ 1 km).

a) Einer der Tests besteht in dem Fliegen des Dreiecks ABC mit A = (40|30|2), B = (125|–20|4) und C = (70|20|5). Ermitteln Sie die Länge der im Testflug zurückgelegten Strecke.

b) Ergänzen Sie die Koordinatenform der Ebene E, auf der A, B und C liegen:
E: $4x + by + cz = 300$.

c) Im Punkt L = (95,2|–9,7|0) befindet sich ein Leuchtfeuer. Dieses Leuchtfeuer muss mehr als 800 m Abstand von der Testebene E haben.

c_1) Zeigen Sie, dass L nicht zu E gehört.

c_2) Welcher Punkt des Testgebietes hat von L den geringsten Abstand?

c_3) Wird der geforderte Abstand eingehalten?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 2

1 *Punktmengen im Raum*

a) Durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ wird eine Punktmenge im Raum beschrieben.

Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Gerade g handelt.

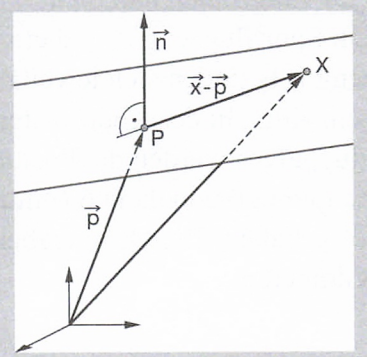
b) Geben Sie die Gleichung einer Ebene E im Raum an, zu der die Gerade g senkrecht ist. Begründen Sie Ihren Ansatz.

2 *Abstandsbestimmungen*

Verschiedene Verfahren zur Abstandsbestimmung im Raum lassen sich kurz beschreiben.

Beispiel: Punkt R – Ebene E (mit Hesse'scher Normalenform)

1. Wenn die Ebene in der Normalenform E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ gegeben ist, gleich zu Schritt 2. Wenn die Parameterform E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v} + s\vec{w}$ gegeben ist, so muss diese zuerst in die Normalenform umgewandelt werden:
   Bestimmen des Normalenvektors $\vec{n}$ über Gleichungssystem $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$. Ein Ortsvektor der Ebene ist in der Parameterdarstellung gegeben.
2. Bestimmen des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.
   Damit Aufstellen der Hesse'schen Normalenform E: $\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.
3. Einsetzen von $\vec{r}$ anstelle von $\vec{x}$: $d(R, E) = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{p})|$.



Beschreiben Sie in gleicher Weise jeweils ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes

- zweier Punkte P und Q im Raum,
- eines Punktes P von einer Geraden g im Raum,
- zweier windschiefer Geraden g und h im Raum.

Wenden Sie jedes dieser Verfahren (einschließlich Punkt – Ebene) auf ein selbstgewähltes Beispiel am Einheitswürfel an (Skizze und Rechnung).

3 *Abstand als Minimum*

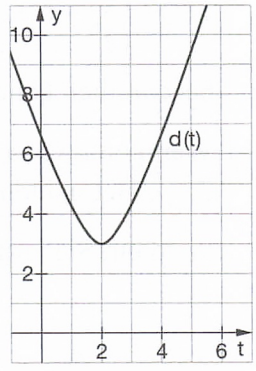
Es soll der Abstand des Punktes P = (2|3|4) zur Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ bestimmt werden.

Dies geschieht durch die Bestimmung des Minimums der Abstandsfunktion $d(t) = \sqrt{9t^2 - 36t + 45}$.

Der Graph dieser Funktion ist hier dargestellt.

Erläutern Sie den Ansatz, wie man zu dieser Abstandsfunktion kommt und warum man das Minimum bestimmen muss.



ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

4 *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 mit folgenden Darstellungen:

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad E_2$: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$ $\quad E_3$: $-x + y + z = 1$

a) Skizzieren Sie E_1 im Koordinatensystem.

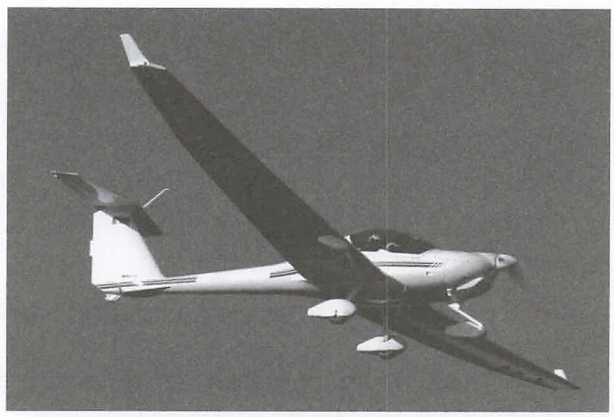
b) Zeigen Sie, dass gilt: $E_2 = E_3$ und E_1 parallel zu E_2.

c) Geben Sie die Gleichungen von zwei Geraden g_1 und g_2 an, für die gilt:
- g_1 parallel zu E_1,
- g_2 orthogonal zu E_1.

d) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (3|1|0)$ von der Ebene E_2.

5 *Flugrouten und Sicherheitsabstand*

Ein Sportflugzeug A und ein Transportflugzeug B befinden sich jeweils auf geradlinigem Kurs. In der Koordinatentabelle des Flughafens werden die Positionen zum Zeitpunkt 0 und dann 6 Minuten später festgehalten. Die Ortsangaben erfolgen in Kilometern.



	Ort zum Zeitpunkt 0	Ort zum Zeitpunkt 6 Minuten
Sportflugzeug A	(0|4|2)	(20|–6|2)
Transportflugzeug B	(3|0|3)	(3|50|–7)

a) Bestimmen Sie jeweils die Richtung und den Betrag der Geschwindigkeit (in km/h) der Flugzeuge.

b) Zeigen Sie, dass man die Positionen der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t (t in Stunden) durch die beiden Gleichungen:

$\overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}200\\-100\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b(t)} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\500\\-100\end{pmatrix}$

beschreiben kann.

c) Wann und wo kommen sich die beiden Flugzeuge am nächsten?
Tipp: Betrachten Sie das Intervall von $0 < t < 1$ mit t in Minuten.

Wird ein Sicherheitsabstand von mindestens 1,5 km eingehalten?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 3

1 *Ebene im Raum*

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A = (0|0|0), B = (2|1|–2) und C = (–2|–2|3) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ bestimmen.

b) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes vom Punkt D = (1|0|2) auf die Ebene E. Berechnen Sie die Entfernung der Punkte D und F. Interpretieren Sie die geometrische Bedeutung des Ergebnisses.

2 *Wahr oder falsch?*

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(A) Für alle Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gilt: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

(B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$

(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftarrow \vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$

(D) $r\cdot\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow r=0$ oder $\vec{b}=\vec{0}$

b) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Gleichungen zweier Ebenen und einer Geraden gegeben.

E_1: $\vec{x}=\vec{p}+r\vec{a}+s\vec{b}$ $\quad E_2$: $\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{d})=0$ $\quad g$: $\vec{x}=\vec{q}+t\vec{v}$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(A) $\vec{n}\perp\vec{a}$ und $\vec{n}\perp\vec{b} \Rightarrow E_1 = E_2$

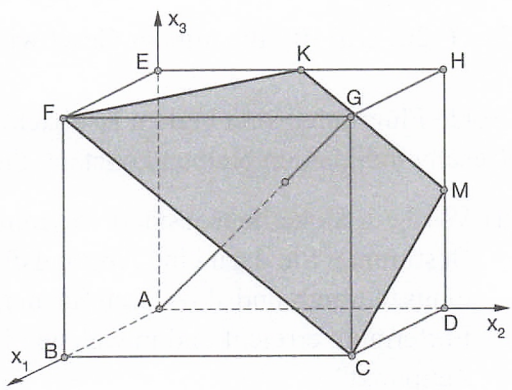
(B) $E_1 = E_2 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{a}$ und $\vec{n}\perp\vec{b}$

(C) $\vec{n}=c\cdot\vec{v} \Rightarrow g\perp E_2$

(D) $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot(\vec{q}-\vec{d})=3 \Rightarrow$ Der Punkt Q liegt nicht auf der Ebene E_2.

3 *Ebene im Quader*

Ein Quader ABCDEFGH hat die Kantenlängen $\overline{AB}$ = 6 cm, $\overline{AD}$ = 5 cm und $\overline{AE}$ = 4 cm. M ist der Mittelpunkt der Kante $\overline{DH}$.



a) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Ebene U, die durch die Punkte F, C und M bestimmt ist.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Mittelpunkt K der Kante $\overline{EH}$ ein Punkt der Ebene U ist.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Raumdiagonalen AG mit der Ebene U. Ist S gleichzeitig auch Schnittpunkt der Geraden FM und CK?

d) Entscheiden Sie, ob die Raumdiagonale AG orthogonal ist zur Ebene U.

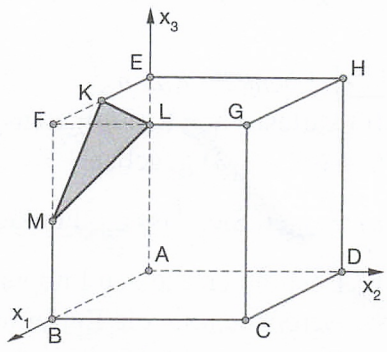
e) Zeigen Sie, dass die Seiten $\overline{FC}$ und $\overline{KM}$ des Vierecks FCMK parallel sind und dass die Längen von $\overline{FK}$ und $\overline{CM}$ verschieden sind. Was bedeutet dies geometrisch?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

4 *Abgeschnittener Würfel*

Ein Würfel der Kantenlänge 4 cm wird längs des Dreiecks abgeschnitten. Die Ecken des Dreiecks befinden sich jeweils auf den drei Kantenmitten.

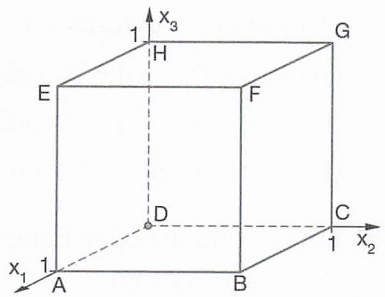


a) Zeichnen Sie ein Netz des Körpers.

b) Begründen Sie rechnerisch, dass eine Raumdiagonale die Dreiecksebene senkrecht schneidet. Zeichnen Sie dies in ein eigenes Schrägbild ein.

c) Beschreiben Sie einen Ansatz zur Berechnung des Durchstoßpunktes (Berechnung nicht erforderlich).

5 *Einheitswürfel*



a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung und eine Normalengleichung für die Ebene ABFE, in der die Vorderfläche des Würfels liegt. Bestimmen Sie dann den Abstand des Punktes P = (2|3|10) von dieser Ebene.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, die durch die Punkte B und H geht.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes F von der Geraden, die durch die Punkte H und B verläuft.

6 *Flugrouten – Analytische Geometrie und Analysis*

Von einem Flughafen startet ein Flugzeug. Zum Zeitpunkt t = 0 befindet es sich im Punkt O = (0|0|0) und fliegt mit der Geschwindigkeit von 300 km/h in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zum gleichen Zeitpunkt ortet der Tower des Flughafens eine weitere Maschine im Punkt P = (–20|–15|10), die mit der Geschwindigkeit von 900 km/h in Richtung $\vec{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ fliegt.

Beide Flugrouten sind in dem Beobachtungszeitraum von 3 min (= 0,05 h) linear, die Geschwindigkeiten bleiben konstant, die Koordinatenangaben sind in km.

a) Wird ein Sicherheitsabstand von mindestens 20 km eingehalten?
Bestimmen Sie dazu eine Abstandsfunktion abstand(t) der beiden Flugzeuge im Beobachtungszeitraum und skizzieren Sie den Graphen. Zu welchem Zeitpunkt t_{min} ist die kürzeste Entfernung erreicht und in welchen Positionen befinden sich die Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

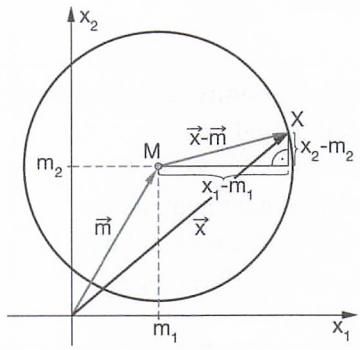
b) Vergleichen Sie den minimalen Abstand mit den Abständen an den Rändern $t_0 = 0\,h$ und $t_1 = 0{,}05\,h$ des Beobachtungsintervalls.

c) Der minimale Abstand der beiden Flugrouten beträgt ungefähr 13,45 km. Begründen Sie ohne Rechnung, warum dieser Abstand der Flugrouten nicht mit dem minimalen Abstand der Flugzeuge übereinstimmt.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

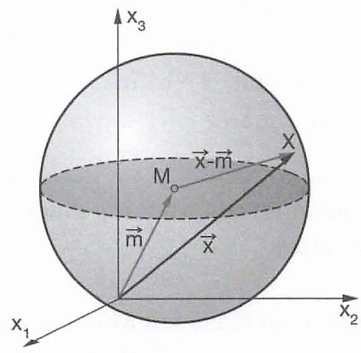
Kreise und Kugeln

Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r



$$K(M, r): \left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$$

Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r



$$K(M, r): (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2$$

ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kreise und Kugeln – Übersicht

Inhalte zu Kreisen und Kugeln
Auf dieser Seite finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Inhalte (Begriffe und Verfahren) zu Kreisen und Kugeln.

Kreis Wodurch ist ein Kreis festgelegt?	**Lagebeziehungen von Kreisen** Welche Lagebeziehungen können zwei Kreise zueinander haben?	**Lagebeziehungen von Kreis und Gerade** Welche Lagebeziehungen können eine Gerade und ein Kreis zueinander haben?
Kreis im Ursprung Welche Gleichung beschreibt einen Kreis mit dem Ursprung im Mittelpunkt und dem Radius r?	**Lagebeziehungen von Punkt und Kugel** Wie erkennt man, ob ein gegebener Punkt auf der Kugeloberfläche liegt?	**Lagebeziehungen von Ebene und Kugel** Welche Lagebeziehungen können eine Ebene und eine Kugel zueinander haben?
Lagebeziehungen von Kugeln Welche Lagebeziehungen können zwei Kugeln zueinander haben?	**Kugel** Wodurch ist eine Kugelgleichung festgelegt?	**Punktprobe** Wie kann man feststellen, ob ein Punkt außerhalb einer Kugel liegt?
Schnittkreis von Kugeln Wie entsteht ein Schnittkreis zweier Kugeln?	**Tangentialebene** Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{b}-\vec{m}$ und $\vec{x}-\vec{b}$ in T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$?	**Gleichungen von Tangenten und Tangentialebenen** Wie unterscheiden sich die Gleichungen der Tangenten eines Kreises und der Tangentialebenen einer Kugel?
Weitere Tangentialebene Beschreibt auch T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{m})=r^2$ eine Tangentialebene im Berührpunkt B?	**Parameterdarstellung eines Kreises** Kann ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung durch Parametergleichungen beschrieben werden?	**Tangente an einen Kreis** Kann man von einem Punkt außerhalb eines Kreises eine Tangente an den Kreis konstruieren?

Beantworten Sie kurz die Fragen zu den Begriffen und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kreis- und Kugelgleichungen

1 *Kreisgleichungen*

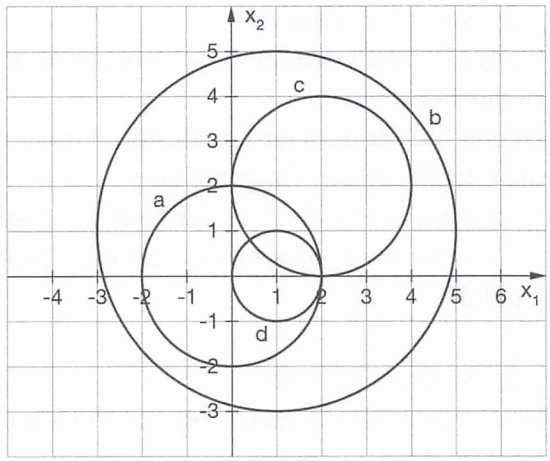
Ordnen Sie den Kreisen die entsprechende Kreisgleichung zu.

K_1: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 4$

K_2: $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$

K_3: $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 = 0$

K_4: $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = 14$



2 *Kugelgleichungen*

Welche Gleichungen beschreiben eine Kugel mit dem Mittelpunkt M = (2|1|–3) und dem Radius r = 3?

(A) $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 = 3^2$

(B) $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 3)^2 = 9$

(C) $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + x_3^2 + 6x_3 = -5$

(D) $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)^2 = 9$

(E) $\left(\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)^2 - 3 = 0$

(F) $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 3)^2 - 9 = 0$

3 *Punktprobe*

Welche der folgenden Punkte liegen in, auf oder außerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkt M = (3|6|2) und dem Radius r = 7: A = (–1|0|0); B = (0|0|4); C = (1|1|1)?

4 *Kugeln mit vorgegebenen Bedingungen*

Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel um den Ursprung …

a) … mit $r = \sqrt{12}$.

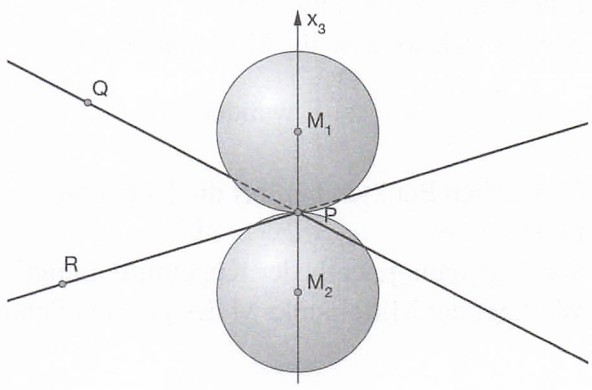
b) … durch den Punkt P = (3|4|–12).

c) …, die die x_1-Achse im Punkt (2|0|0) schneidet.

5 *Kugelmittelpunkte*

Die Gerade PQ durch die Punkte P = (1|2|3) und Q = (2|–1|7) sowie die Gerade PR durch die Punkte P = (1|2|3) und R = (–1|3|5) berühren im Schnittpunkt der beiden Geraden zwei Kugeln mit dem Radius r = 15.

Bestimmen Sie die Kugelmittelpunkte.



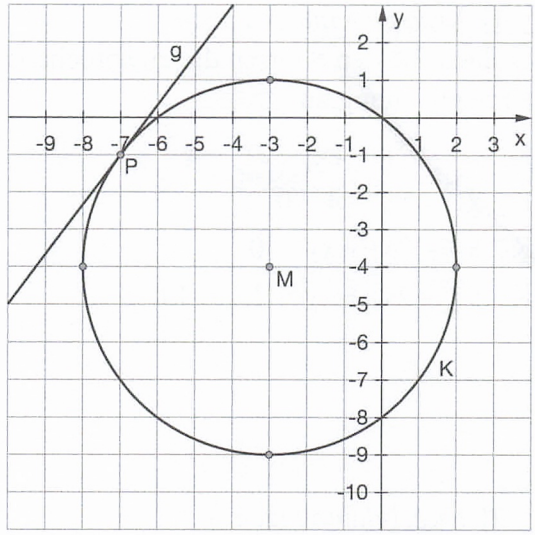
ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kreise, Kugeln und Geraden

1 *Kreis und Tangente*

Geben Sie die Gleichung des Kreises K in vektorieller Form an.
Geben Sie für die vier markierten Punkte jeweils die Gleichung der Tangente an.
Geben Sie die Gleichung der Geraden g an und weisen Sie nach, dass es sich um eine Tangente handelt.

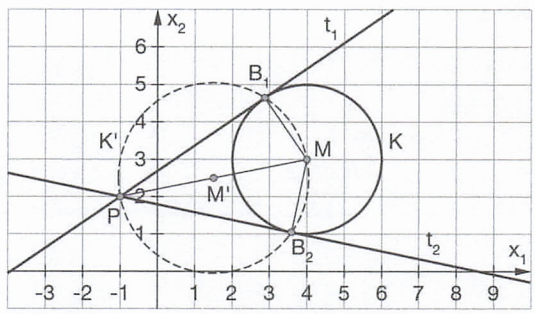


2 *Kreis und Gerade*

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte des Kreises K: $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 6{,}25$
mit der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

3 *Tangenten an einen Kreis von einem Punkt aus*

Von einem Punkt P = (–1|2) aus sollen die Tangenten an den Kreis K mit dem Mittelpunkt M = (4|3) und dem Radius r = 2 gelegt werden.
Beschreiben Sie die Konstruktion der beiden Tangenten und bestimmen Sie die dazugehörigen Gleichungen.



4 *Lagebeziehung von Kugel und Gerade*

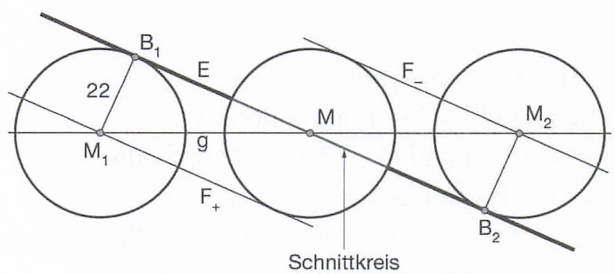
Welche Lagebeziehung haben die Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (1|2|2) und dem Radius r = 3, und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ zueinander?

5 *Kugel und Gerade*

Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel K um den Ursprung, die die Gerade durch die Punkte P = (11|0|11) und Q = (20|–6|13) berührt.

6 *Bewegte Kugelmittelpunkte*

Eine Kugel K mit dem Radius r = 22 bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}39\\61\\-23\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}13\\20\\-8\end{pmatrix}$ wandert.



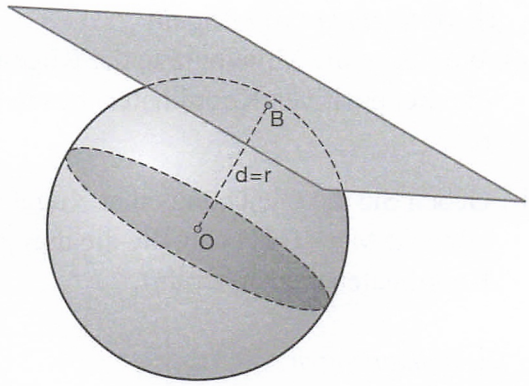
In welchen Punkten berührt die Kugel die Ebene E: $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11$?
Wo liegt dann jeweils der Kugelmittelpunkt?
Wo liegt der Mittelpunkt M des größten Schnittkreises von K und E?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kugeln und Ebenen

1 *Kugeln berühren Ebenen*

Eine Kugel um den Ursprung berührt eine Ebene im Berührpunkt.
Bestimmen Sie den Berührpunkt B und die Gleichung einer Kugel um den Ursprung, die folgende Eigenschaft erfüllt:



a) Die Kugel berührt die Ebene
E: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 49$.

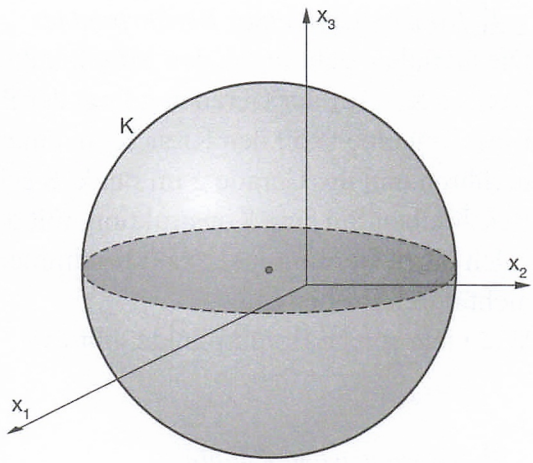
b) Die Kugel berührt die Ebene
F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$.

2 *Kugel durch gegebene Ebene bestimmen*

Eine Kugel berührt die Ebene E: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 26$ im Berührpunkt B = (4|3|■).
Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Ebene F: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kugel.

3 *Schnittkreise mit Koordinatenebenen*

Gegeben ist die Kugel K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$.



a) Zeigen Sie, dass die Kugel K die drei Koordinatenebenen schneidet.

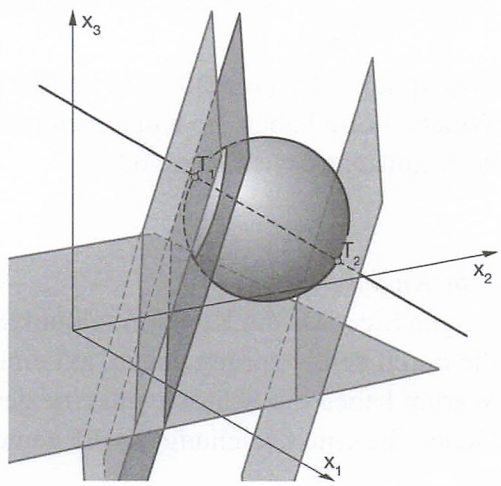
b) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem Sie den Schnittkreis der Kugel mit der x_1x_2-Ebene bestimmen können.

c) Bestimmen Sie jeweils die Schnittkreise mit den Koordinatenebenen.

4 *Tangentialebenen*

Die beiden zur Ebene

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallelen Tangentialebenen durch T_1 und T_2 an die Kugel K sollen bestimmt werden.
Die Kugel K hat den Mittelpunkt M = (2|1|3) und den Radius r = 3.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der beiden Tangentialebenen und geben Sie die Gleichungen der beiden Tangentialebenen an.



ISBN: 978-3-507-85586-1

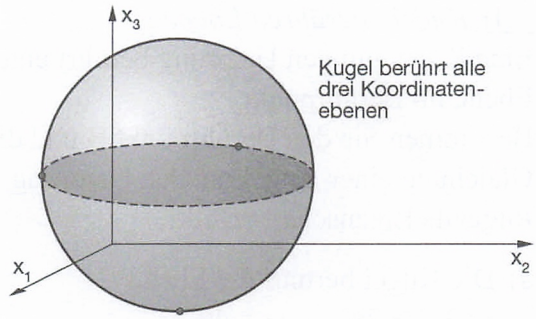
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Verschiedenes zu Kreisen und Kugeln

1 *Mittelpunkte von Kugeln*

a) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die die drei positiven Koordinatenebenen berühren?

b) Geben Sie die Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt M = (1|1|1) an, die die drei positiven Koordinatenebenen berührt.



2 *Punktmengen*

a) Was beschreibt die Gleichung $(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 3)^2 = 34$ im zweidimensionalen Raum?

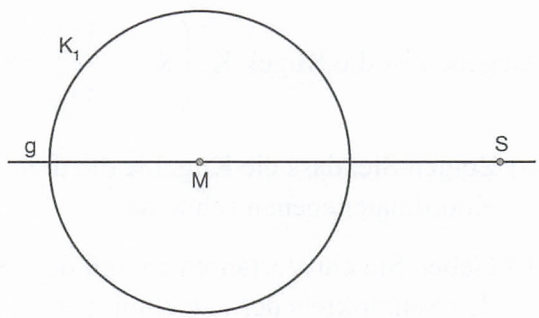
b) Was beschreibt die Gleichung $(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 3)^2 = 34$ im dreidimensionalen Raum?

3 *Kreis- und Geradengleichung*

Nur ein Punkt einer Geradengleichung erfüllt eine Kreisgleichung. Welche Bedingung gilt dann für den Richtungsvektor der Geraden?

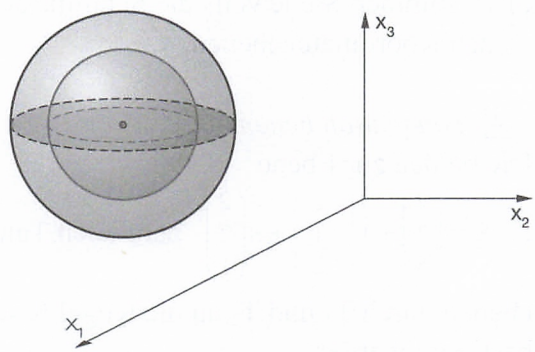
4 *Konstruktion eines Berührpunktes*

Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M des Kreises K_1. Auf der Geraden g liegt der Punkt S. Eine Tangente t soll den Kreis K_1 in einem Punkt berühren und die Gerade g im Punkt S schneiden. Beschreiben Sie eine Konstruktion, mit der man solch einen Berührpunkt exakt bestimmen kann – nicht durch Probieren.
Wie viele solche Berührpunkte gibt es?



5 *Konzentrische Kugeln*

K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 = 4$ beschreibt eine Kugel mit Mittelpunkt M = (1|–2|3) und Radius r = 2.
Welche Form haben die Kugelgleichungen von zu K konzentrischen Kugeln?



6 *Kugelschar*

Zeigen Sie, dass die Kugelmittelpunkte M_a = (3a|4a|12a) mit a > 0 einer Schar von Kugeln, die durch den Ursprung gehen, auf einer Geraden liegen.
Warum haben die Scharkugeln eine gemeinsame Tangentialebene?
Geben Sie eine Gleichung für die gemeinsame Tangentialebene an.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Multiple Choice

Kreuzen Sie an, welche Antworten richtig sind. Auch mehrere Antworten können richtig sein.

a) Welche Kugel wird beschrieben?

K: $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right)^2=5$

(A) $M=(-1|-2|-2);\ r=\sqrt{5}$ ☐

(B) $M=(1|2|2);\ r=5$ ☐

(C) $M=(1|2|2);\ r=\sqrt{5}$ ☐

(D) Es wird keine Kugel beschrieben. ☐

b) Welche Gleichungen sind Kreis- oder Kugelgleichungen?

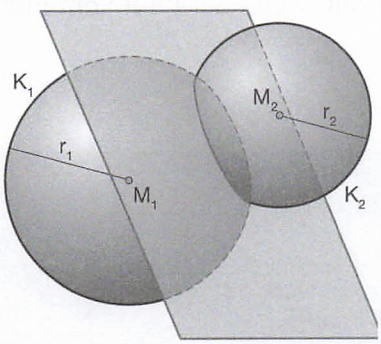
(A) $(x_1-2)^2+(x_2+1)^2=2$ ☐

(B) $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)^2=11$ ☐

(C) $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)=1$ ☐

(D) $\left(x_1-\sqrt{5}\right)^2+\left(x_2+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2}$ ☐

c) In welchen Fällen haben die beiden Kugeln $K_1(M_1, r_1)$ und $K_2(M_2, r_2)$ einen Schnittkreis?



(A) $|\overline{M_1M_2}|=r_1$ und $r_2>2r_1$ ☐

(B) $|\overline{M_1M_2}|=r_1+r_2$ ☐

(C) $|\overline{M_1M_2}|<r_1+r_2$ und $|\overline{M_1M_2}|>|r_1-r_2|$ ☐

(D) $|\overline{M_1M_2}|>r_1+r_2$ ☐

d) Welche Aussagen sind wahr?

(A) Von drei Kugeln im Raum schneiden sich immer mindestens zwei. ☐

(B) Die Punktmenge $K:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)^2=1$ beschreibt eine Kugel. ☐

(C) Die Gerade $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ kann eine Tangente an eine Kugel sein. ☐

(D) Die Strecke vom Mittelpunkt einer Kugel zum Berührpunkt einer Tangentialebene steht senkrecht zu dieser. ☐

(E) Für eine Tangentialebene gilt: Eine Gerade durch den Kugelmittelpunkt enthält in jedem Fall den Berührpunkt der Tangentialebene. ☐

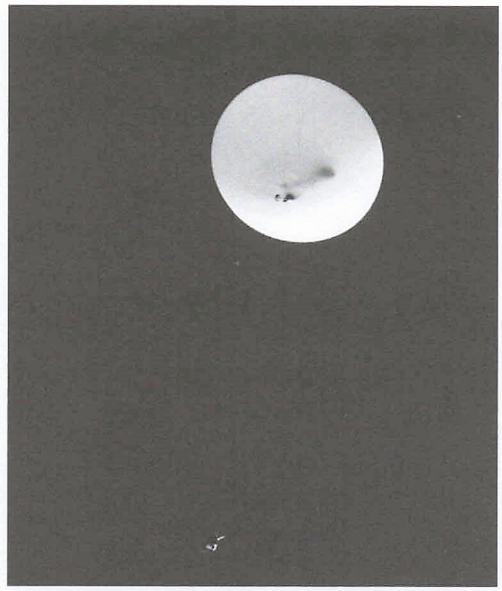
(F) Mithilfe von drei verschiedenen Punkten im Raum ist eine Kugel eindeutig bestimmt. ☐

(G) Jede Gerade durch den Kugelmittelpunkt schneidet die Kugel in zwei Punkten. ☐

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Wetterballone

1 *Wetterballon auf einem Flugplatz*



Auf einem Segelflugplatz, der sich in der x_1x_2-Ebene befindet, steht zur Erfassung der Wetterverhältnisse ein kugelförmiger Wetterballon stationär im Punkt $M = (17|62|4{,}8)$. Eine Längeneinheit entspricht bei allen Angaben einem Kilometer.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass ein Flugzeug auf seinem geradlinigen Weg von $A = (-30|100|4)$ nach $B = (10|40|5)$ immer einen Abstand von mehr als 18 km zum Ballonmittelpunkt hat.

b) Im Cockpit des Flugzeugs ertönt ein Warnton, sobald der Abstand zum Ballonmittelpunkt 9 km oder weniger beträgt.
Geben Sie eine Kugelgleichung für den Rand dieses Warnbereichs um den Ballon an.

c) Berechnen Sie den Punkt, an dem das Warnsignal zuerst ertönt, wenn der Pilot vom Punkt $C = (18|76|2{,}8)$ direkt auf den Ballonmittelpunkt zusteuert.

2 *Wetterballon in einer Forschungsstation*

Eine meteorologische Forschungsstation verwendet für ihre Arbeit einen Wetterballon, mit dem sie Messgeräte in die Atmosphäre aufsteigen lassen kann. Dieser Ballon besteht aus einer gasgefüllten kugelförmigen Gummihülle.
Der Ballon hat einen Durchmesser von $d = 2$ m und den Mittelpunkt $M = (4|4|3)$. Alle Angaben sind in Metern.
Nahe der Forschungsstation befindet sich ein 932 m hoher Berg, dessen der Station zugewandter Hang vereinfacht durch einen Teil der Ebene E mit der Gleichung

$$E: -5{,}5x_1 + 5{,}5x_2 - 1{,}15x_3 + 3872 = 0$$

beschrieben werden kann. Der Gipfel des Berges befindet sich im Punkt $G = (17|-882|932)$.
Der Ballon wird nun steigen gelassen.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}25 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$, auf der sich der Ballonmittelpunkt bewegt, den Teil der Ebene E, der den Berghang darstellt, nicht schneidet.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g zum Punkt G.

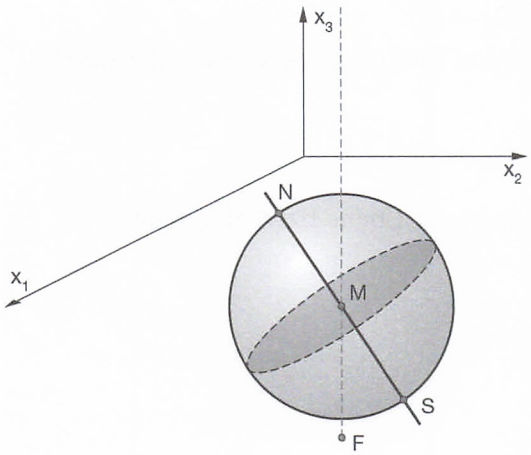
c) Der Ballonmittelpunkt befindet sich auf seiner Fahrt zu einem bestimmten Zeitpunkt bei $M = (-154|-440|1089)$. Geben Sie die Kugelgleichung des Ballons an und bestimmen Sie den Punkt P auf der Ballonoberfläche, der dem Gipfel G am nächsten liegt.

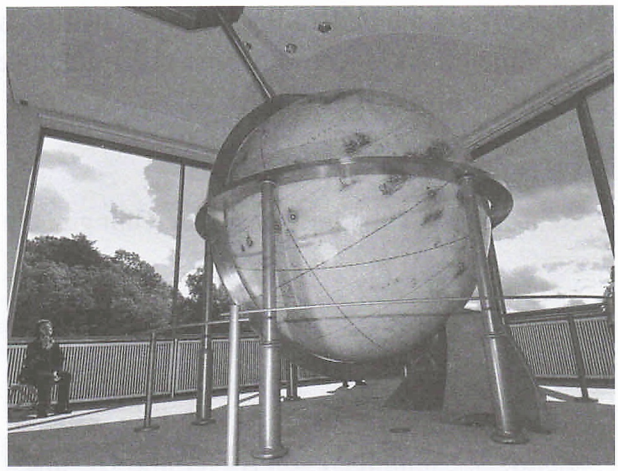
ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Globus und Bewegungsmelder

1 *Globus*

In einem Gebäude steht ein begehbarer Globus mit dem Mittelpunkt M = (5|4,4|2,8) und dem Durchmesser d = 4,1 m. Der Boden im Gebäude liegt in der x_1x_2-Ebene. Alle Angaben sind in Metern. Durch den Kugelnordpunkt N und den Kugelsüdpunkt S verläuft eine Drehachse, die gegenüber der Senkrechten geneigt ist.
Auf dem Erdboden liegt senkrecht unter dem Kugelmittelpunkt der Punkt F.





a) Geben Sie die Gleichung einer Kugel an, die den Globus beschreibt. In welcher Höhe über dem Erdboden befindet sich der tiefste Punkt des Globus?

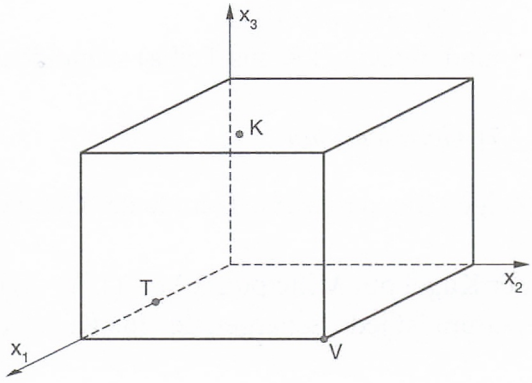
b) Die Drehachse durchstößt den Globus im Nordpol N = (5|3,56|4,67). Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der die Drehachse liegt.
Bestimmen Sie den Punkt Z, in dem die Gerade g den Erdboden schneidet.

c) Berechnen Sie den Winkel, um den die Drehachse gegenüber der Senkrechten geneigt ist.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Äquatorialebene.

2 *Alarmanlage*

In einem Museum ist ein wertvoller Gegenstand in einer Vitrine ausgestellt, die mithilfe einer Alarmanlage gesichert wird. Als Teil der Alarmanlage ist an der Decke des Ausstellungsraumes im Punkt K = (4,5|5|4) ein Bewegungsmelder installiert, der eine Reichweite von 2,5 m hat.
Ein Einbrecher, der eine Körpergröße von 2 m hat, bewegt sich aufrecht gehend auf geradem Weg von der Tür T zur Vitrine V.
Die Tür und die Vitrine werden als Punkte angesehen. Diese Punkte lauten T = (3|0|0) und V = (6|10|0), die Längeneinheit beträgt jeweils einen Meter.
Berechnen Sie die Streckenlänge, die der Dieb in Richtung Vitrine zurücklegen kann, ohne vom Bewegungsmelder erfasst zu werden.



ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up

1 *Punkte auf Kreisen oder Kugeln*

Geben Sie jeweils drei möglichst „lehrreiche" Punkte an, die die Gleichung erfüllen.

a) K: $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right)^2=25$ b) K: $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right)^2=225$

2 *Kreis durch zwei Punkte*

Gegeben sind die beiden Punkte A = (0|0|0) und B = (2|–4|4).
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises, der durch die Punkte A und B verläuft.

3 *Kreis- und Kugelgleichung*

Beschreiben die quadratischen Gleichungen einen Kreis in der Ebene bzw. eine Kugel im Raum?

a) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - 20 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 + 14 = 0$

4 *Lagebeziehungen von Kugel und Gerade*

Welche Lagebeziehungen sind zwischen einer Kugel und einer Geraden möglich?

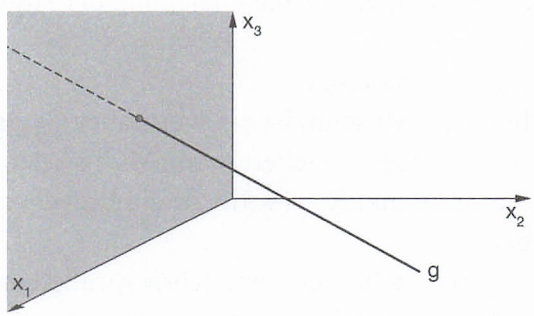
5 *Lagebeziehungen von Kugel und Ebene*

a) Welche Lagebeziehungen kann es zwischen einer Kugel und einer Ebene geben?

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene E: $8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 14 = 0$ und der Kugel K mit Mittelpunkt M = (1|2|3) und Radius r = 2.

6 *Kugel, Gerade und Ebene*

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel K mit Radius r = 5, die die x_1x_3-Ebene als Symmetrieebene hat und deren Mittelpunkt auf der Geraden g durch die Punkte A = (2|1|–1) und B = (3|2|–3) liegt.



b) Zeigen Sie, dass sich die Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ und die Kugel K aus Teil a) schneiden.

7 *Geradenschar*

Zeigen Sie, dass keine Gerade der Geradenschar g_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-3\\a+1\end{pmatrix}$ eine Kugeltangente der Kugel mit Mittelpunkt M = (1|4|–3) und Radius r = 3 ist.
Warum ist jede Schargerade eine Kugelsekante?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest

1 *Kugel und Gerade*

Untersuchen Sie die Kugel mit dem Mittelpunkt M = (–7|–8|–9) und dem Radius $r = \sqrt{33}$ auf gemeinsame Punkte mit der Geraden durch die Punkte A und B.

a) A = (–5|–5|–4); B = (5|5|–14)

b) A = (–6|–12|–13); B = (–5|–3|–7)

c) A = (–3|–7|–5); B = (–5|–3|–4)

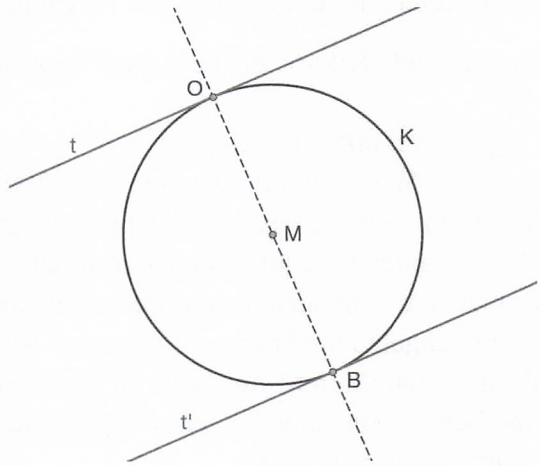
2 *Kreis und Tangenten*

a) Zeigen Sie, dass in einem zweidimensionalen Koordinatensystem durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 7x_2 = 0$ ein Kreis bestimmt wird.

b) Zeigen Sie, dass der Ursprung (0|0) auf dem Kreisrand liegt.

c) Bestimmen Sie eine Tangente t an den Kreis im Ursprung.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der zu t aus Teil c) parallelen Tangente t′ an den Kreis und den dazugehörigen Berührpunkt.



3 *Zwei Kreise*

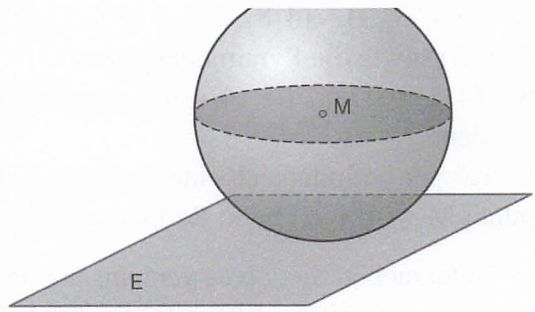
Durch die beiden Gleichungen werden zwei Kreise beschrieben.

$K_1: x_1^2 + x_2^2 = 4$ $\qquad$ $K_2: x_1^2 + (x_2 - 3)^2 = 1$

Haben die beiden Kreise gemeinsame Punkte?
Zeichnen Sie die beiden Kreise in ein Koordinatensystem und überprüfen Sie damit Ihre Rechnung.

4 *Tangentialebene*

Die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist Tangentialebene an die Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (5|–3|6) und dem Radius r. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K.



5 *Lagebeziehung von zwei Kugeln*

Welche Lagebeziehung haben die beiden Kugeln
$K_1: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$ und $K_2: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 1)^2 = 25$ zueinander?

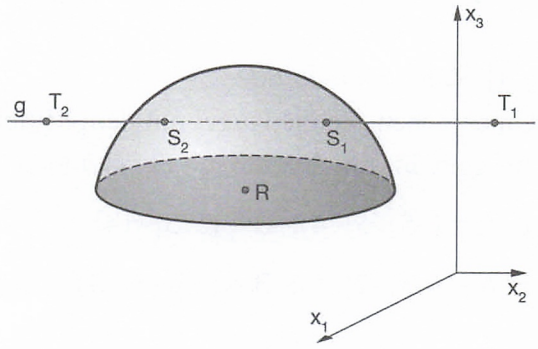
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 *Radarbereich*

Ein Flugzeug bewegt sich entlang der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $T_1 = (-127{,}2\,|\,80{,}4\,|\,12)$ nach $T_2 = (112{,}8\,|\,-99{,}6\,|\,12)$.

In der Nähe der Startbahn, die in der x_1x_2-Ebene liegt, befindet sich ein Radar im Punkt $R = (-10{,}2\,|\,-13{,}6\,|\,0)$ mit halbkugelförmigem Überwachungsbereich und dem Radius $r = 85$ km.

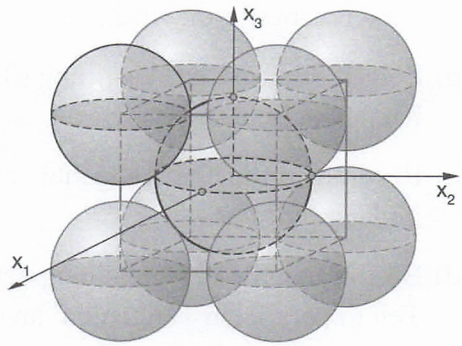


a) In welchem Punkt S_1 tritt das Flugzeug in den Überwachungsbereich ein?

b) Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug im Überwachungsbereich?

7 *Würfel mit neun Kugeln*

In einem Würfel mit der Kantenlänge 2, dessen Würfelmitte im Koordinatenursprung liegt und dessen Würfelkanten parallel zu den Koordinatenachsen angeordnet sind, sind an den acht Ecken jeweils gleich große Kugeln angebracht. Eine neunte Kugel mit dem Radius r hat ihren Mittelpunkt im Koordinatenursprung und berührt alle anderen acht Kugeln. Sie darf den Würfel nicht verlassen.



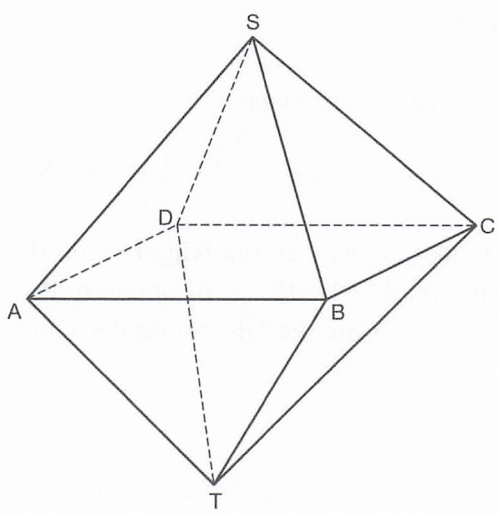
a) Begründen Sie, warum die äußeren Kugeln den Radius $r^* = \sqrt{3} - r$ haben. Geben Sie an, zwischen welchen Werten sich der Radius r der Innenkugel bewegen kann.

b) Geben Sie die Gleichungen der Innenkugel mit dem Radius $r = 0{,}5$ und der hierfür markierten äußeren Kugel an.

8 *Doppelpyramide*

Eine Doppelpyramide ist aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zusammengesetzt. Die Doppelpyramide kann durch die Punkte $A = (8\,|\,4\,|\,3)$, $B = (4\,|\,8\,|\,3)$, $C = (0\,|\,4\,|\,3)$, $D = (4\,|\,0\,|\,3)$ sowie die Pyramidenspitzen $S = (4\,|\,4\,|\,5{,}5)$ und $T = (4\,|\,4\,|\,0{,}5)$ beschrieben werden.

Im Körper befindet sich eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (4\,|\,4\,|\,2{,}5)$ und Radius $r = 1{,}4$.



a) Untersuchen Sie, ob es gemeinsame Punkte der Kugel mit der Ebene E, die durch A, B und T verläuft, gibt.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M* und den Radius r* des Schnittkreises der Kugel mit der Ebene F, die durch die Punkte A, B und C verläuft.

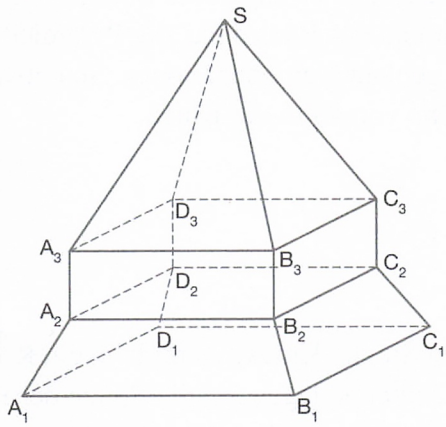
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Komplexe Aufgaben

Kirchturmdach

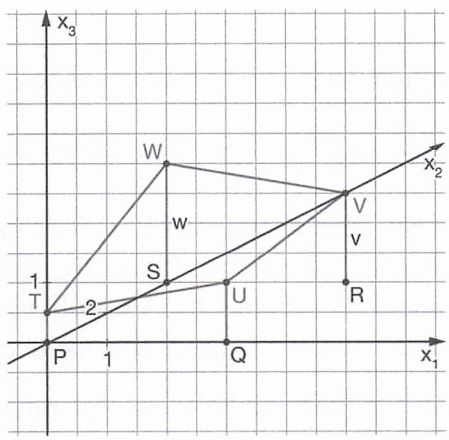
Das Kupferdach des Kirchturms einer Kirche besteht aus einem Pyramidenstumpf, einem aufgesetzten Quader und einer auf den Quader aufgesetzten Pyramide. Das gesamte Dach soll neu gedeckt werden. Von einem zugehörigen Schrägbild sind folgende Punkte bekannt (1 LE ≙ 1 m):

$A_1 = (4|-4|0)$ $B_1 = (4|4|0)$
$C_1 = (-4|4|0)$ $A_2 = (3|-3|2)$
$B_2 = (3|3|2)$ $A_3 = (3|-3|4)$
$S = (0|0|10)$



Marktplatz

Der Marktplatz einer kleinen Stadt – ein 30 × 40 m^2 großes Rechteck – soll mit einer Plane überdacht werden. Diese soll an den Enden von vier – unterschiedlich langen – Pfosten befestigt werden, die in den Ecken des Grundstücks errichtet werden.
Im Koordinatensystem (1LE ≙ 10 m) können die Fuß- und Endpunkte der Pfosten dargestellt werden durch:
$P = (0|0|0)$, $Q = (3|0|0)$, $R = (3|4|0)$, $S = (0|4|0)$, $T = (0|0|0{,}5)$, $U = (3|0|1)$, $V = (3|4|1{,}5)$, $W = (0|4|2)$

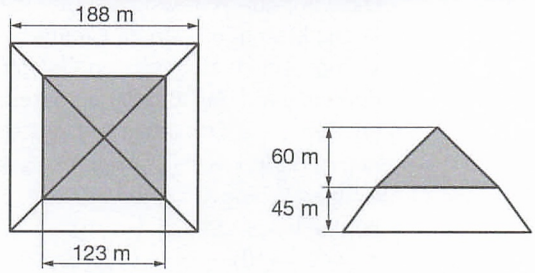


ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Knickpyramide

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Knickpyramide des ägyptischen Königs SNOFRU (siehe Foto). Sie befindet sich in Dahschur und wurde um 2650 v. Chr. erbaut.

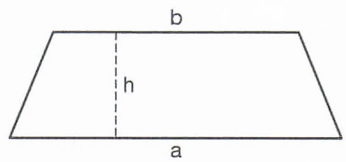
Über die eigentümliche Form der Pyramide gibt es verschiedene Theorien. Eine geht davon aus, dass die Pyramide ursprünglich wesentlich höher gebaut werden sollte. Konstruktionsmängel und der instabile Boden zwangen die Baumeister jedoch während des Baus dazu, die Pyramide kleiner als geplant werden zu lassen. So entstand in einer Höhe von 45 m der Knick.



a) Zeichnen Sie die Knickpyramide in ein Koordinatensystem. Wählen Sie einen Maßstab von 1 : 2000 und legen Sie die Spitze der Pyramide auf die x_3-Achse. Achten Sie darauf, die räumliche Lage aller Eckpunkte zu verdeutlichen.

b) Berechnen Sie die ursprüngliche Höhe der Pyramide, wenn der Bau durch den Knick nicht verändert worden wäre.

c) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der Knickpyramide. Verwenden Sie für den Flächeninhalt der oberen Dreiecke das Vektorprodukt, für die unteren Trapeze die Formel $A_{TR} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



d) Die Pyramide wirft unter der Sonne einen Schatten auf die Erdoberfläche. Dabei wird die Richtung der einfallenden Lichtstrahlen durch den Vektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ beschrieben.

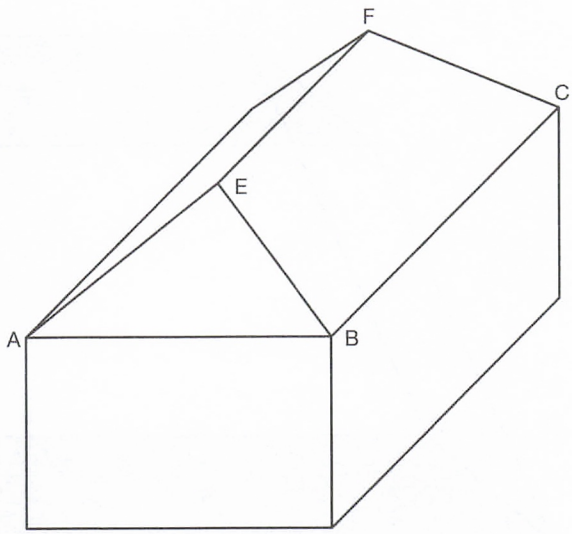
Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide in das Koordinatensystem ein. Berechnen Sie hierzu zunächst, an welchen Punkt der Erdoberfläche der Schatten der Pyramidenspitze geworfen wird. Ihr räumliches Vorstellungsvermögen kann Ihnen helfen zu erkennen, welche zwei „Schattenpunkte" Sie noch benötigen.

e) Unter dem Neigungswinkel einer Pyramide versteht man den Winkel zwischen den Seitenflächen und der Erdoberfläche. Die Knickpyramide besitzt somit zwei Neigungswinkel, da jede Seitenfläche durch den Knick aufgeteilt wird. Bestimmen Sie die beiden Neigungswinkel der Knickpyramide.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Walmdachhaus

Durch die Punkte A = (0|0|5), B = (0|8|5), C = (−12|8|5), E = (−2|4|8) und F = (−10|4|8) ist das Walmdach eines Hauses beschrieben. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.



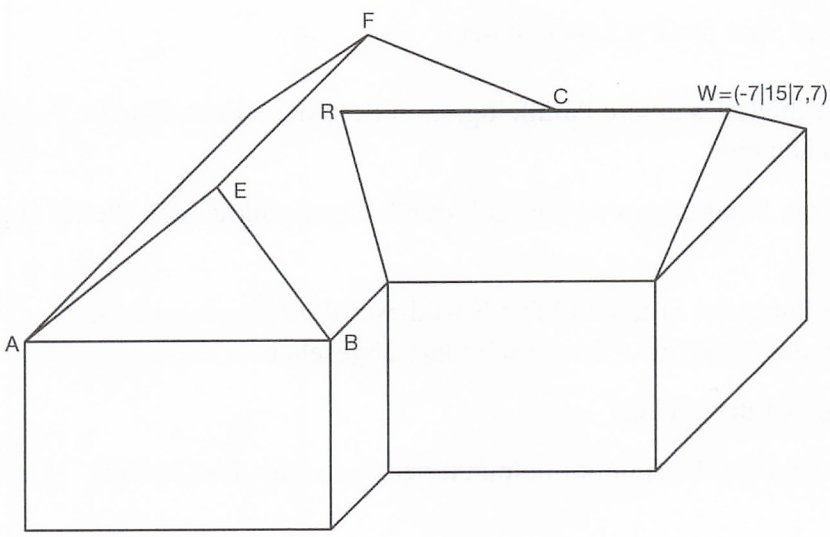
a) Berechnen Sie die Länge der Dachkanten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ sowie die Größe des Winkels, den die Kanten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ einschließen.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt F auf der Ebene E_1, die durch die Punkte B, C und E geht, liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E_1.

c) Zeigen Sie, dass die Dachfläche BCFE ein symmetrisches Trapez ist. Berechnen Sie auch dessen Flächeninhalt.

d) Zwischen den Punkten P und Q, die auf den Kanten $\overline{AE}$ und $\overline{BE}$ liegen, verläuft ein zwei Meter langer Balken parallel zur Kante $\overline{AB}$. Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an.

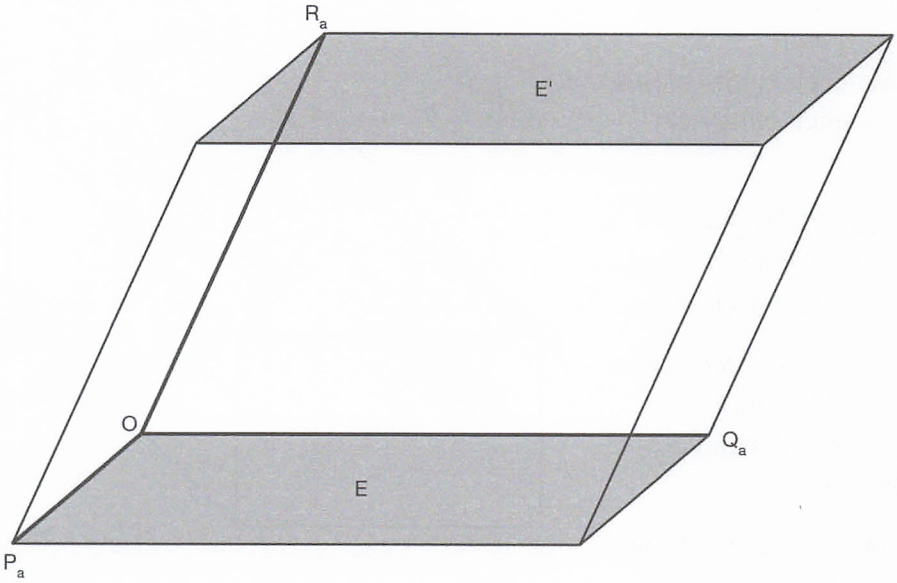
e) Das Gebäude wird durch einen symmetrischen Anbau erweitert, der rechtwinklig zum Haus steht. Der Dachfirst des Anbaus verläuft dabei waagerecht zum Erdboden, d. h. parallel zur x_2-Achse.



Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem der Dachfirst des Anbaus auf die Dachfläche BCFE trifft.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Spat



Gegeben sind die Punkte $P_a = (4|a|0)$, $Q_a = (-2|-a|2a)$ und $R_a = (-2|0|4a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Die Vektoren $\overrightarrow{OP_a}$, $\overrightarrow{OQ_a}$, $\overrightarrow{OR_a}$ spannen einen Spat auf. Berechnen Sie dessen Volumen. Für welchen Parameter ist dieses Volumen gleich null?

b) Für welchen Parameter a beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $P_aQ_aR_a$ 18 FE?
Zur Kontrolle: $A = \frac{1}{2}\sqrt{36a^4 + 180a^2}$

Im Folgenden wird der Spat für $a = 2$ betrachtet.

c) Welche Winkel schließt das untere Parallelogramm E, in dem die Punkte O, P_2, Q_2 liegen, mit den Seitenflächen ein?

d) Die Mitte des oberen Parallelogramms E′ soll durch einen senkrechten Pfeiler abgestützt werden.

d_1) Auf welchem Punkt der unteren Ebene E ist dieser Pfeiler anzubringen?
Hinweis: Von der Dicke des Pfeilers wird hier abgesehen.

d_2) Welche Länge hat der Pfeiler?

d_3) Welchen Abstand hat der Raummittelpunkt des Spats von dem Pfeiler?

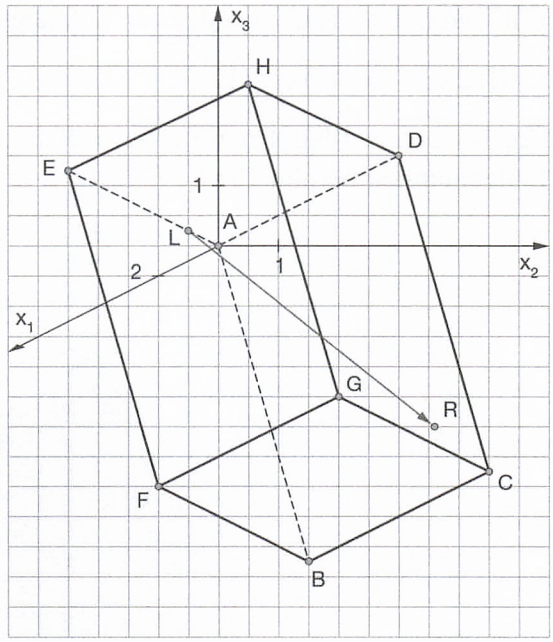
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kristallspat

Ein Kristallspat kann idealisiert als Körper mit gegenüberliegenden kongruenten Parallelogrammen beschrieben werden.

Der Spat ist gegeben durch die Punkte
A = (0|0|0), B = (9|6|−3), C = (11|10|−1),
D = (2|4|2) und E = (7|1|3).
Eine Längeneinheit beträgt einen Millimeter.

Durch die Punkte A, B, C und D ist die Grundfläche festgelegt.
Die dazu parallele und kongruente Fläche EFGH heißt Deckfläche.



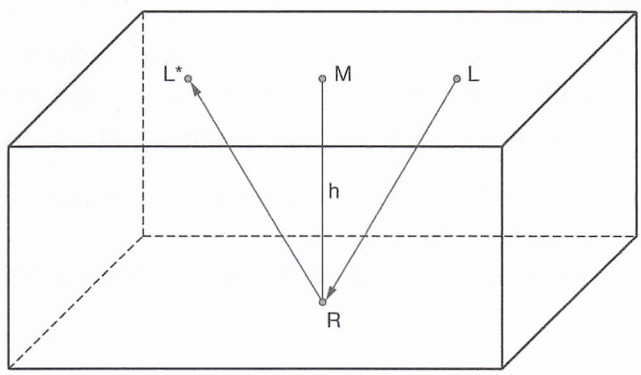
a) Geben Sie eine Ebene D_1 an, in der die Deckfläche liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ein Parallelogramm ist und bestimmen Sie dessen Flächeninhalt. Berechnen Sie auch das Volumen des Spats.

c) Ein Lichtstrahl trifft die Deckfläche im Punkt L = (11|5|3) und verläuft innerhalb des Kristalls in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -19 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl auf die Grundfläche trifft und berechnen Sie den Auftreffpunkt R.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Lichtstrahl auf die Grundfläche trifft.

d) Der Lichtstrahl trifft die Grundfläche im Punkt R. Gehen Sie davon aus, dass dieser Lichtstrahl an der Grundfläche wie an einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Nehmen Sie weiterhin an, dass der reflektierte Strahl ungehindert zur Deckfläche gelangen kann und diese im Punkt L* durchdringt. Geben Sie mithilfe der Skizze einen Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von L* an und bestimmen Sie den Punkt L*.



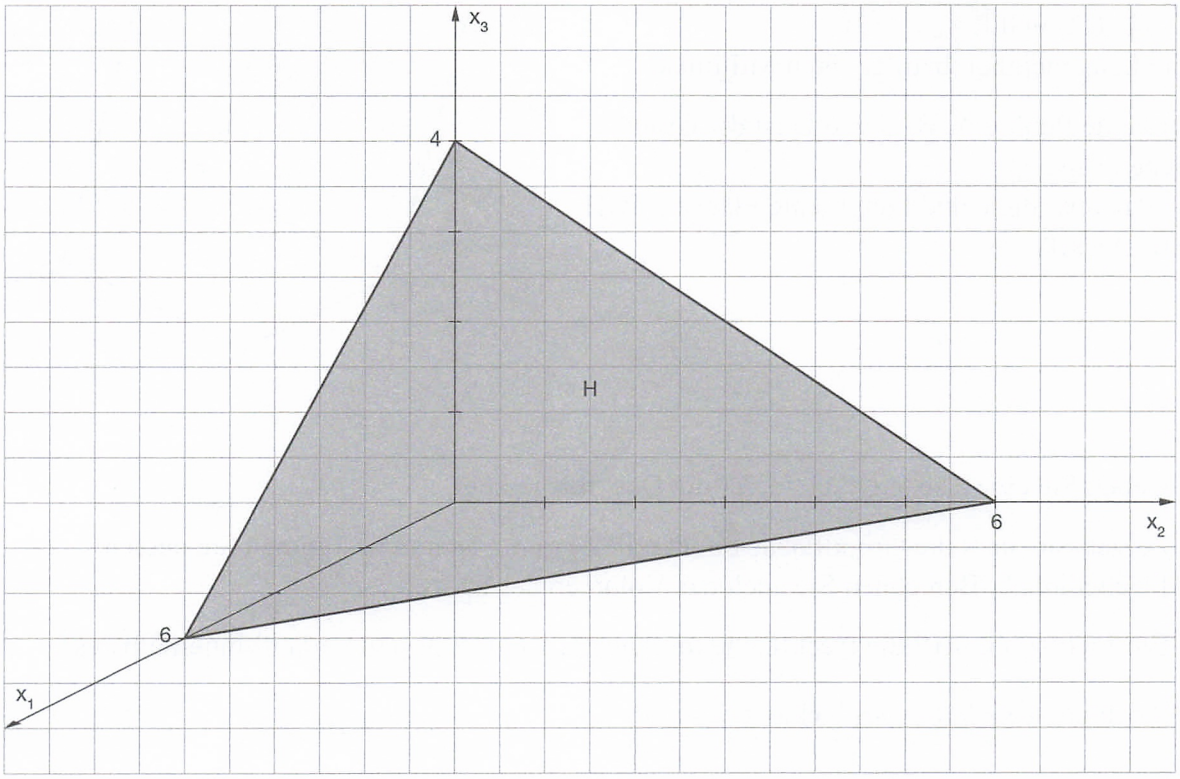
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Sendemast

Ein Hang, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt, kann durch die Ebene

$H: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$

beschrieben werden. Ein 60 m hoher Sendemast steht senkrecht im Punkt $F = (4|3|0)$. Eine Längeneinheit beträgt 10 m.



a) Zeigen Sie, dass der Sendemast nicht auf dem Hang steht, sondern in der x_1x_2-Ebene.

b) Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.

c) Der Sendemast soll am Hang zusätzlich befestigt werden. Dazu soll am Sendemast auf halber Höhe ein möglichst kurzes Stahlseil zum Hang führen.
Bestimmen Sie die Verankerungspunkte für das Stahlseil. Wie lang ist das Stahlseil?

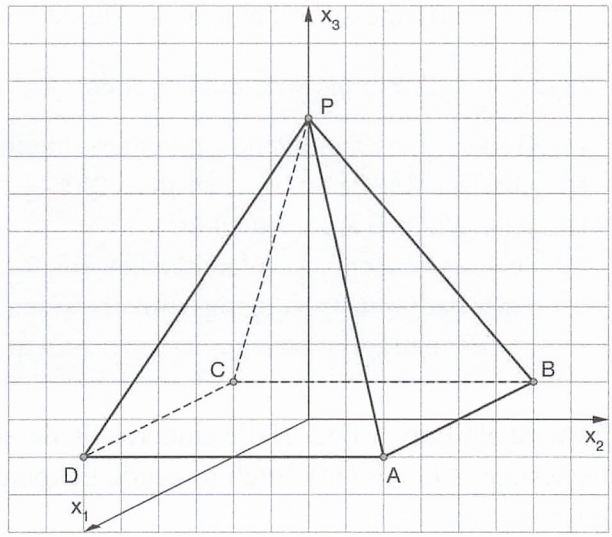
d) Der Sendemast knickt während eines Sturmes um. Dabei trifft die Spitze S des Sendemastes den Hang im Punkt $Q = (0|3|2)$.
In welcher Höhe ist der Sendemast abgeknickt?

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Oberlichter

In ein Flachdach sollen zwei baugleiche gläserne Oberlichter eingebaut werden.
Jedes Oberlicht soll die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben.
Die Grundfläche soll offen bleiben und die vier Seitenflächen sollen durch dreieckige Glasscheiben gebildet werden.
Die Höhe der Pyramide und die Länge der Grundseite sollen jeweils 24 dm betragen.
Die Punkte $A = (12|12|0)$, $B = (-12|12|0)$, $C = (-12|-12|0)$ und $D = (12|-12|0)$ sind die vier Eckpunkte des Grundquadrats eines der Oberlichter.
Der Punkt $P = (0|0|24)$ bildet die Pyramidenspitze. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.



a) Für den Zuschnitt der Scheiben sind die Innenwinkel der dreieckigen Scheiben von Bedeutung. Berechnen Sie diese Innenwinkel.
Berechnen Sie ohne Berücksichtigung des Verschnitts den Glasbedarf in Quadratmetern für den Bau eines Oberlichts.

b) Für die Montageschienen benötigt man sowohl die Länge einer zur Spitze führenden Pyramidenkante als auch den spitzen Winkel, den zwei benachbarte gläserne Seitenflächen einschließen. Berechnen Sie die beiden Größen.

c) Zum Lüften wird im Punkt $E = (2|-12|0)$ ein Motor mit einer Gewindestange angebracht. Das andere Ende der Gewindestange ist so an einem Punkt F des Glasfensters ABP befestigt, dass sie orthogonal auf die Fläche trifft. Bestimmen Sie den Punkt F.

d) Lotrecht unterhalb der Pyramidenspitze P soll eine „punktförmige Lampe“ L aufgehängt werden. Dabei sollen diejenigen von L ausgehenden Lichtstrahlen, die jeweils auf die Schwerpunkte der gläsernen Dreiecke treffen, die Glasflächen orthogonal durchdringen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem sich die Lampe befinden muss.

Hinweis: Der Ortsvektor des Schwerpunktes S eines Dreiecks ABC lautet
$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

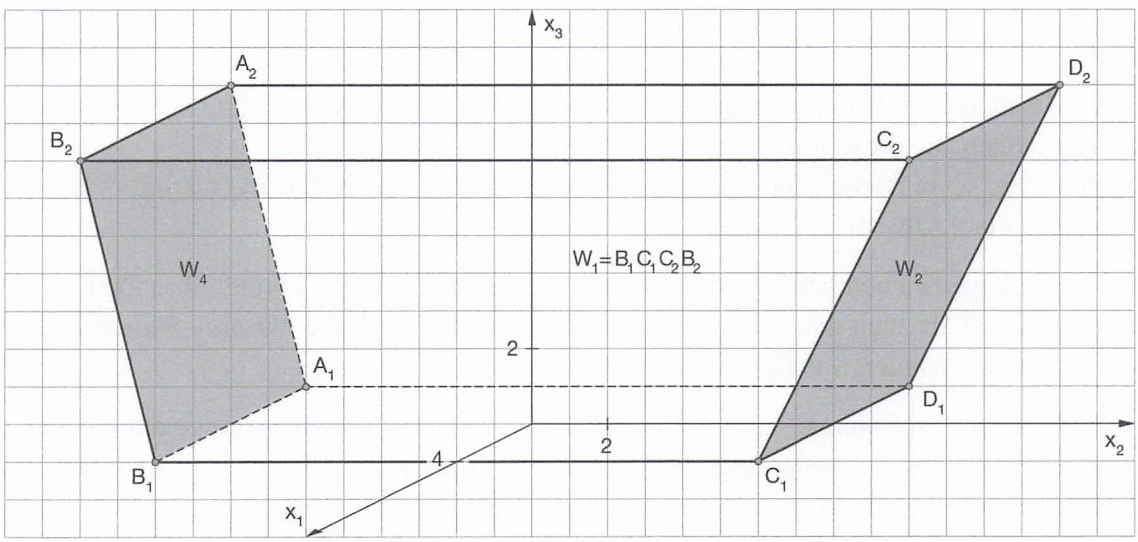
Messehalle

Für eine Schiffsmesse soll eine neue Ausstellungshalle gebaut werden.

In der Ausschreibung sind die folgenden Anforderungen für einen Bau aufgelistet:

I Boden- und Dachfläche sind unterschiedlich große Rechtecke.
II Die Dachfläche ist um höchstens 25 % größer als die Bodenfläche.
III Alle Wände sind rechteckig.
IV Je zwei benachbarte Wandflächen sind orthogonal zueinander.
V Falls der (spitze) Neigungswinkel zwischen einer Wandfläche und dem Boden weniger als 70° beträgt, ist ein zusätzlicher Stützpfeiler notwendig.

Es wird ein Entwurf der Halle eingereicht, dessen maßstabsgetreue Wiedergabe im Koordinatensystem (1 LE $\triangleq$ 1 m) durch folgende Eckpunkte für die Grundfläche bzw. die Dachfläche gegeben ist:
$A_1 = (-4|-8|0)$, $B_1 = (4|-8|0)$, $C_1 = (4|8|0)$, $D_1 = (-4|8|0)$,
$A_2 = (-4|-10|8)$, $B_2 = (4|-10|8)$, $C_2 = (4|12|8)$, $D_2 = (-4|12|8)$.



a) Untersuchen Sie den obigen Entwurf anhand folgender Aufträge:

a1) Weisen Sie nach, dass Bedingung I erfüllt ist.

a2) Weisen Sie nach, dass Bedingung II nicht erfüllt ist.

a3) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Wandflächen $W_1 = B_1C_1C_2B_2$ und $W_2 = C_1D_1D_2C_2$ sowie den Winkel zwischen W_1 und $W_4 = B_1A_1A_2B_2$. Ist die Bedingung IV erfüllt?

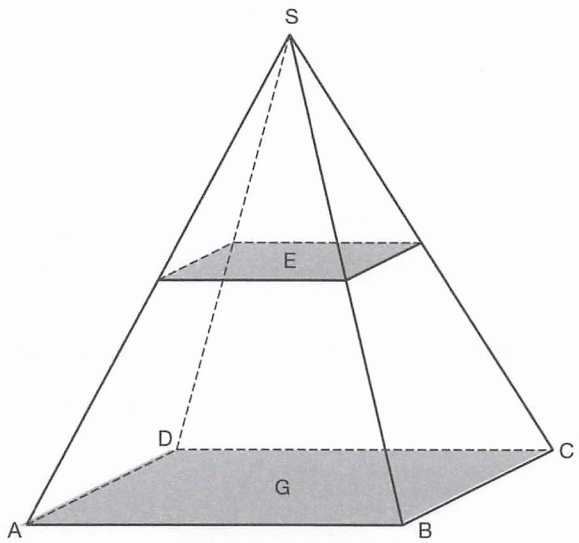
a4) Zeigen Sie, dass die Wand W_2 einen Stützpfeiler braucht.

b) Der Stützpfeiler soll W_2 vom Punkt $F = (0|23|0)$ aus im rechten Winkel stützen. In welchem Punkt S trifft er auf die Ebene der Wandfläche W_2? Ist S ein Punkt der Hallenwand? Wie lang muss der Stützpfeiler sein?

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Quadratische Pyramide

Eine Pyramide heißt quadratisch, wenn ihre Grundfläche ABCD ein Quadrat ist und ihre Spitze S auf derjenigen Geraden liegt, die orthogonal zu dem Grundflächenquadrat ist und durch dessen Mittelpunkt verläuft.



a) Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte C, D und S einer quadratischen Pyramide, wenn man folgende Koordinaten bereits kennt:
$A = (2|-4|4)$, $B = (5|1|8)$,
$C = (8|-4|c_3)$ und $S = (s_1|s_2|14)$
(Zur Kontrolle: $C = (8|-4|12)$,
$S = (-3|-4|14)$).

b) Wie groß sind das Volumen und die Oberfläche der Pyramide ABCDS?

c) Wie groß ist der Schnittwinkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen der Pyramide?

d) Zeigen Sie, dass die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ mit } s, r \in \mathbb{R}$$

parallel zu der Ebene G ist, die die Grundfläche ABCD enthält. Zeigen Sie weiterhin, dass die Ebene E zwischen der Spitze S und der Grundfläche der Pyramide liegt.

e) Berechnen Sie das Volumen des so erhaltenen Pyramidenstumpfes zwischen den Ebenen E und G.

f) Zeigen Sie allgemein:
Aus einer quadratischen Pyramide mit der Quadratseitenlänge a und der Höhe h soll ein Quader mit möglichst großem Volumen ausgeschnitten werden. Welche Kantenlängen muss dieser Quader haben?

Hinweis: Der gesuchte Quader hat ein Quadrat als Grundfläche (kurze Begründung), dessen Seitenlänge mit x bezeichnet wird. Für die Zielfunktion ergibt sich hiermit

$$V(x) = h \cdot x^2 - \frac{h}{a} \cdot x^3.$$

Leiten Sie die Formel für das Volumen des Quaders her.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geradenscharen

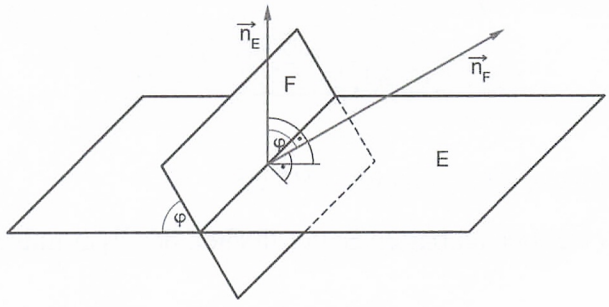
Gegeben sind zwei Ebenen E und F, eine Gerade h und eine Geradenschar g_a.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad F: -x_1 - 2x_2 + x_3 = -14 \quad (r, s \in \mathbb{R});$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 6a \\ -3a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

a) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von E.

b) Berechnen Sie den Winkel, den E und F miteinander bilden.



c) Prüfen Sie, ob h in E liegt.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von F mit der Geraden h.

e) Weisen Sie nach, dass die Ebene F orthogonal ist zur Strecke $\overline{GH}$ zwischen den beiden Stützpunkten von g_a und h (G = (3|8|5), H = (0|2|8)).
Zeigen Sie, dass die Ebene F den Punkt G enthält.

f) Der Punkt P = (0|10|6) liegt auf F. Spiegeln Sie den Punkt P an G und geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P′ an.

g) Die Punkte P, P′ und H bilden ein Dreieck D.
Beschreiben Sie die Menge der Punkte, die die Dreiecksfläche bilden.
Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

h) Weisen Sie nach, dass jede Gerade der Schar g_a in der Ebene E liegt.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

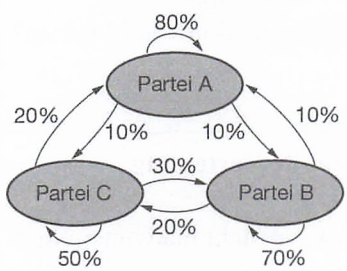
Matrizen

Von Tabellen zu Matrizen

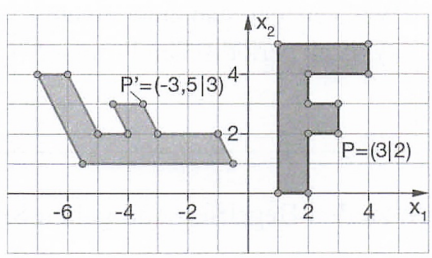
	Mischung 1	Mischung 2	Mischung 3
Weizenflocken	0,8	0,3	0
Dinkelflocken	0	0,3	0,5
Haferflocken	0	0,3	0,3
Rosinen	0,05	0,1	0,1
Leinsamen	0,15	0	0,1

$$\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & \\ \left(\begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} W \\ D \\ H \\ R \\ L \end{matrix} \end{matrix}$$

Übergangsprozesse



Geometrische Abbildungen



© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Matrizen – Übersicht

Inhalte zu Matrizen
Auf dieser Seite finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Inhalte (Begriffe und Verfahren) zu Matrizen.

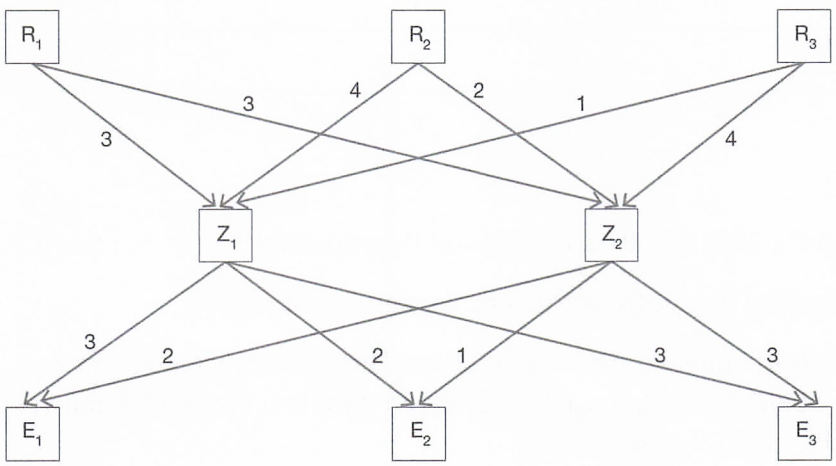
(m × n)-Matrix Was versteht man unter einer (m × n)-Matrix?	**Addition von Matrizen** Unter welchen Bedingungen kann man Matrizen addieren und wie geht man dann vor?	**S-Multiplikation bei Matrizen** Unter welchen Bedingungen kann man eine S-Multiplikation ausführen und wie geht man dann vor?
Matrizenprodukt I Unter welchen Bedingungen kann man zwei Matrizen miteinander multiplizieren und welche Form hat die Produktmatrix?	**Matrizenprodukt II** Nach welchem Schema multipliziert man zwei Matrizen?	**Einheitsmatrix** Was versteht man unter einer Einheitsmatrix?
Inverse Matrix Was versteht man unter einer inversen Matrix?	**Rechengesetze** Welche Rechengesetze gelten bei der Addition und Multiplikation von Matrizen?	**Übergangsmatrix** Was versteht man unter einer Übergangsmatrix?
Übergangsgraph Was versteht man unter einem Übergangsgraphen?	**Stabile Verteilung** Was versteht man unter einer stabilen Verteilung und wie kann man sie ermitteln?	**Stochastische Matrix** Was versteht man unter einer stochastischen Matrix?
Grenzmatrix Was versteht man unter einer Grenzmatrix und wie kann man sie ermitteln?	**Zyklisch periodischer Prozess** Was versteht man unter einem zyklisch periodischen Prozess?	**Input-Output-Analyse** Womit beschäftigt sich die Input-Output-Analyse?

Beantworten Sie kurz die Fragen zu den Begriffen und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

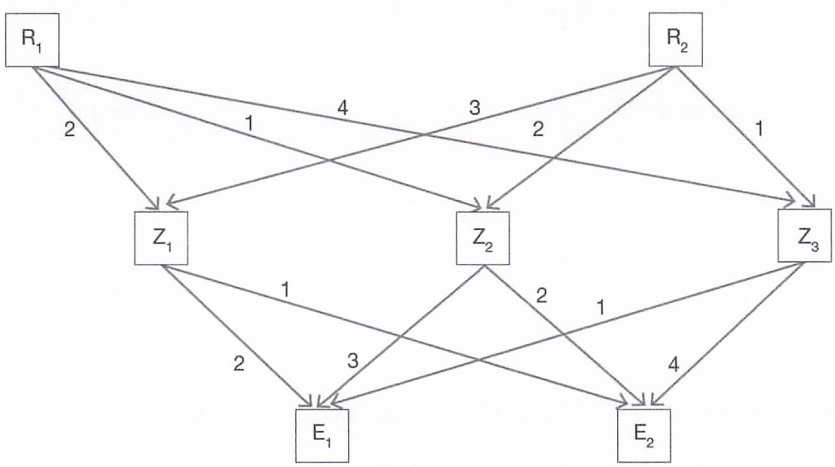
Materialverflechtung – Vom Graphen zur Matrix

a) Die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 werden für die Herstellung der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 benötigt. Aus diesen Zwischenprodukten werden drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt.
Im Graphen sind die jeweils benötigten Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Rohstoffe für die Herstellung eines Zwischenproduktes (1 ME) und die jeweils benötigten Mengeneinheiten der einzelnen Zwischenprodukte für die Herstellung eines Endproduktes (1 ME) dargestellt.



Bestimmen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A, die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sowie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

b) Aus wirtschaftlichen Gründen werden nun nur noch zwei Endprodukte erzeugt und der Produktionsprozess wird auf drei Zwischenprodukte umgestellt.



Bestimmen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A, die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sowie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.
Es sollen 4 ME von E_1 und 7 ME von E_2 hergestellt werden. Wie viele Rohstoffe werden benötigt?

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Produktionen

1 *Chemiewerk*

In einem Chemiewerk werden aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Produkte P_1, P_2 und P_3 hergestellt.
In der Tabelle sind die benötigten Mengen der einzelnen Rohstoffe für die Herstellung der einzelnen Produkte zusammengefasst.

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3
Rohstoff 1	8	1	1
Rohstoff 2	15	0	2
Rohstoff 3	2	6	4

Alle Angaben in Tonnen (t).

Im Januar wurden 200 t von P_1, 240 t von P_2 und 120 t von P_3 produziert.

a) Welche Mengen der einzelnen Rohstoffe wurden im Januar verbraucht?

b) Welche Mengen der Rohstoffe müssen für Februar eingeplant werden, wenn damit zu rechnen ist, dass die Produktion von P_1 um 10 % gesteigert wird und die Produktion von P_2 um 10 % sinkt, die von P_3 um 25 % sinkt?

2 *Brauerei*

Eine Brauerei produziert an den drei Standorten A, B und C jeweils die Biersorten Pils, Weizenbier und Malzbier. Aus technischen Gründen fallen die verschiedenen Sorten an jedem Standort in einem festen Verhältnis zueinander an.
In der Tabelle sind die auf einen Monat bezogenen Maximalkapazitäten der verschiedenen Standorte angegeben.

	Standort A	Standort B	Standort C
Pils	200	300	200
Weizenbier	100	200	400
Malzbier	200	400	500

Alle Angaben in Hektoliter (hl).

Im Mai liegen Aufträge für 470 hl Pils, 500 hl Weizenbier und 760 hl Malzbier vor.

a) Kann die Produktion so eingestellt werden, dass ohne Überschuss produziert wird?

b) Wie sind dann die einzelnen Standorte in ihrer Kapazität ausgelastet?

c) Gibt es noch eine andere Möglichkeit der Kapazitätsauslastung unter den gleichen Bedingungen?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Produktionsprozesse

1 *Zweistufiger Produktionsprozess*

Ein Betrieb verarbeitet die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3. Aus diesen Zwischenprodukten werden drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt.
Die benötigten Mengeneinheiten (ME) sind in den Tabellen zusammengefasst.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	6	8	2
R_2	2	0	2
R_3	0	4	1
R_4	4	6	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	6	2	2
Z_2	2	4	4
Z_3	6	2	6

a) Wie viele der einzelnen Rohstoffe werden für die Herstellung von je 1000 ME der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 benötigt?

b) Im Lager sind zurzeit 18 800 ME von R_1, 4800 ME von R_2, 6100 ME von R_3 und 0 ME von R_4. Wie viele Rohstoffe von R_4 müssen bestellt werden, wenn der Lagerbestand vollständig verarbeitet werden soll? Wie viele Mengeneinheiten können dann von jedem Endprodukt hergestellt werden?

2 *Keksherstellung*

Aus den Zutaten Teig (T), Marmelade (M), Schokolade (S) und Nüsse (N) werden drei verschiedene Kekssorten K_1, K_2 und K_3 hergestellt. Diese werden in drei verschiedenen Packungen P_1, P_2 und P_3 verkauft.
Die benötigten Mengeneinheiten (ME) sind in den Tabellen zusammengefasst.

	K_1	K_2	K_3
T	2	1	2
M	1	0	1
S	0	1	0,5
N	0	0,5	0

	P_1	P_2	P_3
K_1	2	1	2
K_2	4	1	5
K_3	1	5	0

Im Lager sind 2046 ME Teig, 702 ME Marmelade, 837 ME Schokolade und 321 ME Nüsse.
Da die Zutaten nur kurz gelagert werden können, soll der gesamte Bestand zu Keksen verarbeitet werden. Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

3 *Lagerauffüllung*

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her.
Aus diesen Zwischenprodukten werden drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt.
Die benötigten Mengeneinheiten (ME) sind in den Tabellen zusammengefasst.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	8	9	10
R_2	9	7	10
R_3	7	11	10

	E_1	E_2	E_3
Z_1	6	2	2
Z_2	3	3	1
Z_3	2	0	2

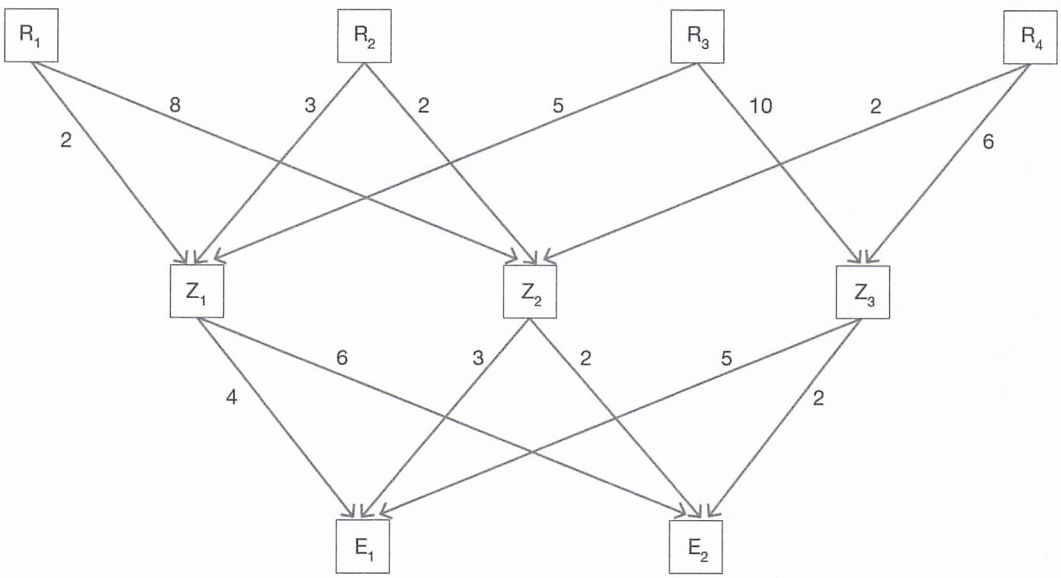
Im Lager sind 1500 ME von R_1 und 2700 ME von R_2. Der Rohstoff R_3 ist nicht vorrätig. Von jedem Endprodukt sollen 40 ME hergestellt werden.
Wie viele ME der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 müssen bestellt werden, damit von jedem Rohstoff 1000 ME als Reserve übrig bleiben?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kostenkalkulation

Ein Betrieb verarbeitet die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3. Aus diesen Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.
Im Graphen sind die jeweils benötigten Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Rohstoffe für die Herstellung eines Zwischenproduktes (1 ME) und die jeweils benötigten Mengeneinheiten der einzelnen Zwischenprodukte für die Herstellung eines Endproduktes (1 ME) dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A, die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sowie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

b) Ein Kundenauftrag umfasst 20 ME vom Endprodukt E_1 und 30 ME vom Endprodukt E_2. Welche Mengen an Rohstoffen und an Zwischenprodukten werden für den Auftrag benötigt?

c) Bestimmen Sie mithilfe der Matrizenrechnung die Gesamtkosten K des Auftrages. Die Kostenrechnung liefert für die Kalkulation die in der Tabelle aufgeführten variablen Kosten. Dabei werden die fixen Kosten grundsätzlich mit 20 % der variablen Kosten veranschlagt.

Materialkosten je ME der Rohstoffe	R_1: 5 €	R_2: 1 €	R_3: 3 €	R_4: 2 €
Herstellungskosten je ME der Zwischenprodukte	Z_1: 40 €	Z_2: 20 €	Z_3: 50 €	
Herstellungskosten je ME der Endprodukte	E_1: 250 €	E_2: 100 €		

d) Welchen Mindestverkaufspreis muss der Betrieb ansetzen, wenn beide Endprodukte zum gleichen Preis verkauft werden und kein Verlust entstehen soll?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Prozesse im Alltag

1 *Barbesucher*

In einem Kino-Center gibt es zwei Bars: Casablanca (C) und Joe's Bar (J). Im Durchschnitt besuchen 600 Personen die Vorstellungen am Samstagabend. Danach verlässt ein Teil der Besucher das Center (V), während die übrigen in eine der Bars gehen. Eine Umfrage ergab:
Von den Leuten, die das Center nach dem Kino verlassen, würden dies 80 % beim nächsten Mal wieder tun, während jeweils 10 % in eine der Bars gehen würden. Von den Casablanca-Kunden kommen 60 % wieder, 20 % wechseln die Bar und 20 % verlassen das Center. Von den Kunden in Joe's Bar bleiben 70 %, 20 % verlassen beim nächsten Mal das Center und 10 % gehen ins Casablanca. Am Abend der Umfrage verließen 400 Personen das Center und jeweils 100 Besucher gingen in eine der Bars.
Erstellen Sie einen Übergangsgraphen sowie eine Übergangsmatrix und berechnen Sie die Besucherzahlen der Bars zwei Wochen später. Wie entwickeln sich die Besucherzahlen langfristig?

2 *Schulkantine*

In einer Schulkantine essen täglich 360 Schüler und Lehrer. Es gibt drei verschiedene Mittags-Menüs: Menü 1 mit Fleisch (F), Menü 2 mit Geflügel bzw. Fisch (G) und das vegetarische Menü 3 (V). Bei Menü 1 würden 80 % am nächsten Tag wieder Fleisch wählen und jeweils 10 % zu einem der anderen Menüs wechseln. Menü 2 würden 60 % am nächsten Tag wieder aussuchen, 30 % wechseln zu Menü 1 und 10 % zu Menü 3. Menü 3 wählen 70 % erneut und 30 % wechseln zu Menü 2. Montags, am Tag der Kantineneröffnung, wählen 140 Personen Menü 1, 120 Personen Menü 2 und 100 Personen Menü 3.
Erstellen Sie einen Übergangsgraphen sowie eine Übergangsmatrix und berechnen Sie die Bestellungen für die einzelnen Menüs am Freitag nach der Eröffnung. Mit welcher Anzahl bei den drei Menüs muss die Küche langfristig rechnen?

3 *Käfer*

Der Lebenszyklus einer bestimmten Käferart besteht aus drei Stadien: Eier, Larven und Käfer. In einer Generation werden im Mittel pro Käfer 8 Eier gelegt. Aus der Hälfte der Eier schlüpfen Larven, aus einem Viertel der Larven entwickeln sich schließlich Käfer.

a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen sowie eine Übergangsmatrix M und überprüfen Sie, ob es sich um einen zyklisch periodischen Prozess handelt.

b) Welche Bedeutung hat die Matrix M^3 in diesem Zusammenhang?

c) Eine Käferpopulation besteht aus 300 Käfern, 2000 Eiern und 900 Larven. Durch Überdüngung entwickeln sich nur noch 40 % der Eier zu Larven und aus 20 % der Larven werden Käfer. Wie viele Käfer kann man nach sechs Generationen erwarten?

Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

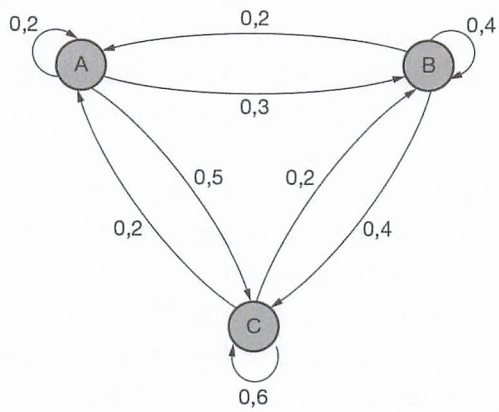
Graphen – Tabellen – Entwicklungen

Füllen Sie die Übergangstabelle aus bzw. zeichnen Sie einen Übergangsgraphen. Stellen Sie anschließend eine Übergangsmatrix auf und berechnen Sie damit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Stellen Sie mithilfe hoher Matrixpotenzen eine Vermutung über einen stabilen Vektor auf und überprüfen Sie diese gegebenenfalls.

a)

	A	B	C
A			
B			
C			

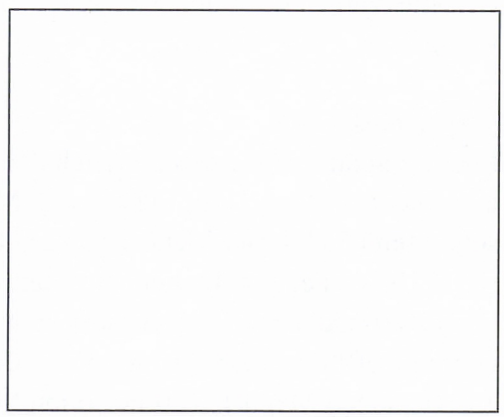
$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$



b)

	A	B	C
A	0	0,5	0,5
B	0,2	0	0,5
C	0,8	0,5	0

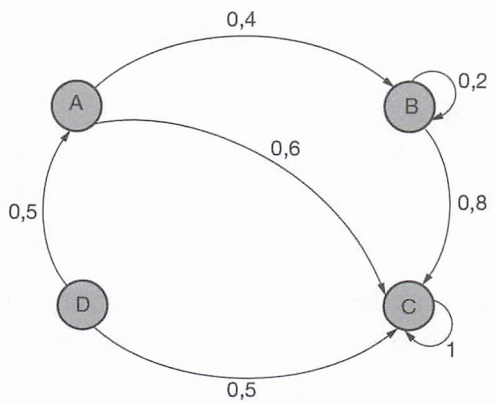
$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$



c)

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$



ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vermischtes

1 *Rechnen mit Matrizen*

Berechnen Sie die folgenden Matrixausdrücke.

a) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ -0{,}5 & -3 \end{pmatrix}^2$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 *Potenzen von quadratischen Matrizen*

Matrixpotenzen mit hohen Exponenten kann man auch ohne Rechner relativ schnell durch fortwährendes Quadrieren erhalten. So ist man mit $\left((M^2)^2\right)^2 = M^8$ nach drei Multiplikationen schon bei M^8. Berechnen Sie auf diese Weise die folgenden Matrixpotenzen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{16}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^8$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}^8$

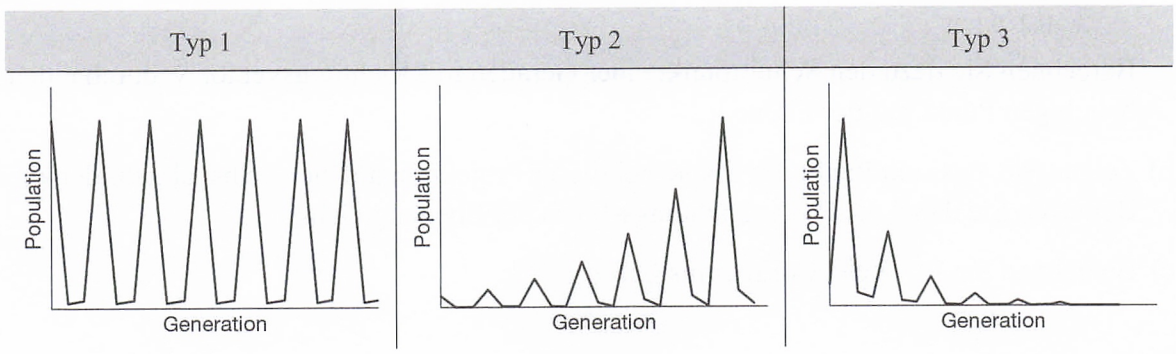
3 *Zyklische Prozesse*

a) Welche der folgenden Matrizen beschreiben einen zyklischen Prozess?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 12{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) Die Graphen zeigen drei Typen von zyklischen Prozessen. Ordnen Sie den zyklischen Matrizen aus a) den passenden Typ zu.

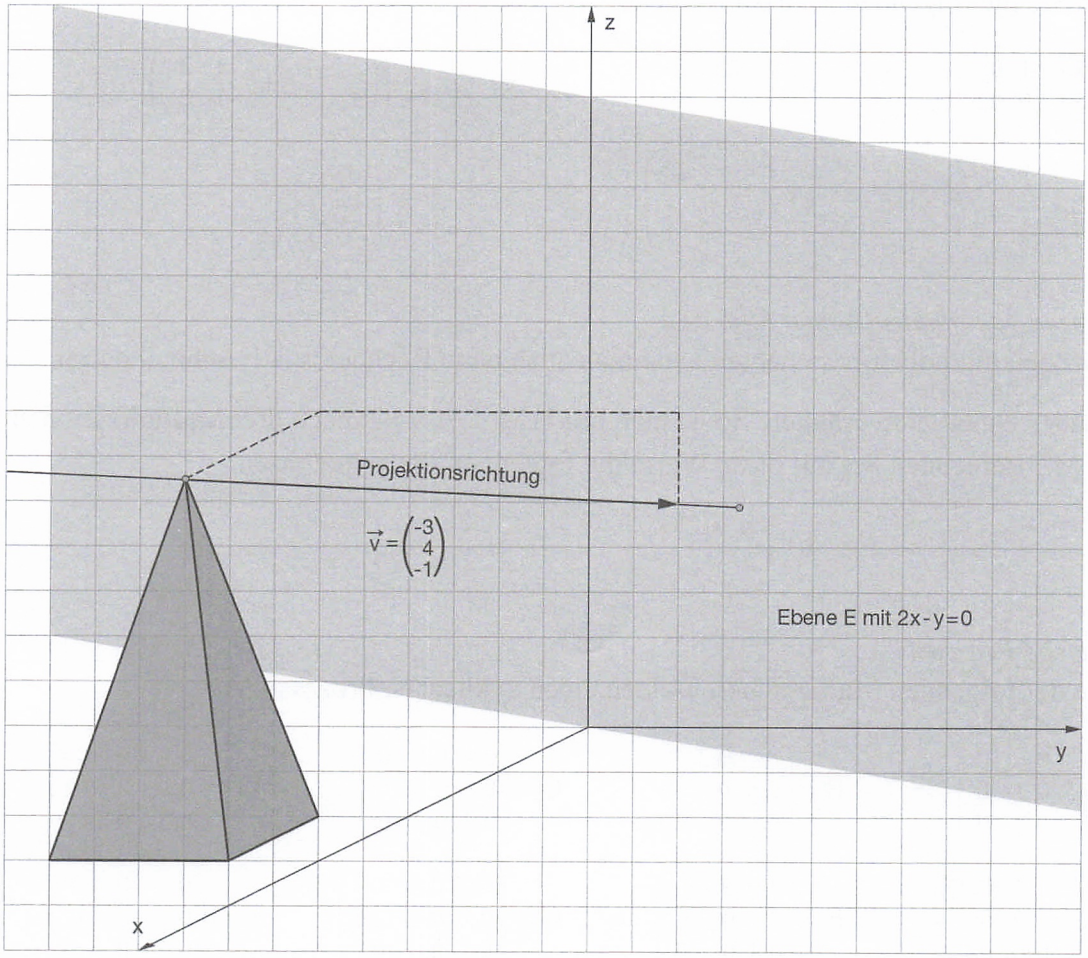


ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Projektionen

Durch paralleles Licht wird die Pyramide auf die Ebene E projiziert.



a) Zeigen Sie, dass diese Projektion beschrieben wird durch die folgende Matrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu den Schnittpunkt einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{v}$ durch einen beliebigen Punkt mit der Ebene E.

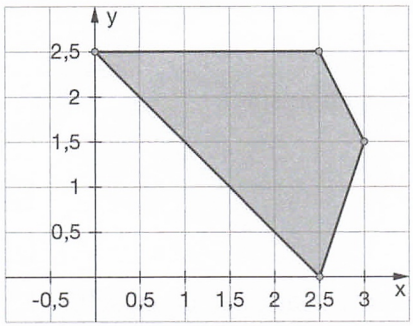
b) Zeigen Sie, dass ein Punkt der Ebene bei dieser Projektion auf sich selbst abgebildet wird. Benutzen Sie dabei die Punkt-Richtungs-Form der Ebenengleichung.

c) Berechnen Sie P^2. Welches Ergebnis liefert P^{100}?

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Spiegelungen

1 *Spiegelung an einer Ursprungsgeraden*

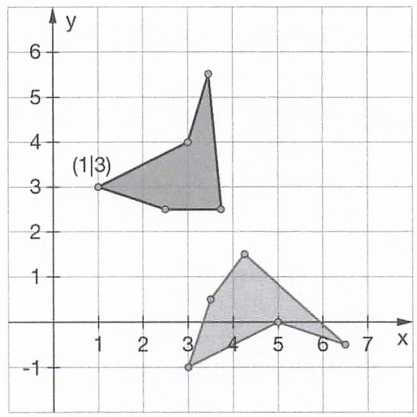


a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die Figur und das Bild der Figur, wenn sie an der Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ gespiegelt wird.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung und berechnen Sie damit die Bildpunkte.

2 *Noch einmal Spiegelung an einer Ursprungsgeraden*

Die eine Figur ist durch Spiegelung der anderen an einer Ursprungsgeraden entstanden.

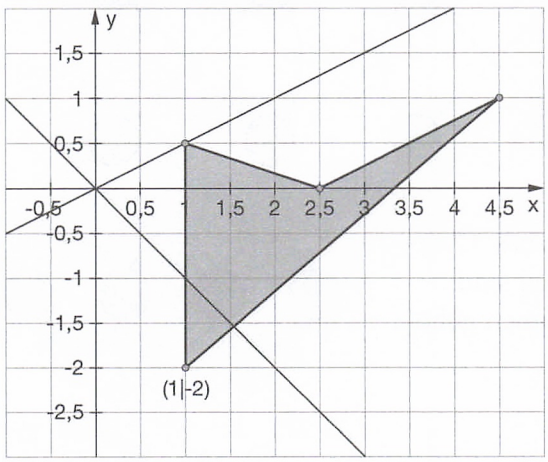


a) Bestimmen Sie die Spiegelgerade zeichnerisch.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung mithilfe zweier Punkte und ihrer Spiegelpunkte und überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie die Bildpunkte der drei anderen Punkte berechnen.

c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt auf der Spiegelgeraden auf sich selbst abgebildet wird.

3 *Zwei Spiegelungen hintereinander*



Die Figur wird zunächst an der Geraden mit der Gleichung $y = 0{,}5x$ gespiegelt. Danach wird das Bild an der Geraden mit der Gleichung $y = -x$ gespiegelt.

a) Zeichnen Sie das Bild nach der ersten und das nach der zweiten Spiegelung in ein Koordinatensystem.
Um welche Abbildung könnte es sich bei der Gesamtabbildung handeln?

b) Bestimmen Sie die Matrizen der beiden Spiegelungen.

c) Berechnen Sie mithilfe der Matrizen der beiden Spiegelungen die Matrix der Gesamtabbildung.
Hinweis: Bei der Multiplikation auf die Reihenfolge achten!

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Multiple Choice

Kreuzen Sie an, welche Antworten richtig sind. Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

1 Welche Aussagen sind wahr? Nennen Sie andernfalls ein Gegenbeispiel.

(1) Übergangsmatrizen sind immer quadratisch. ☐

(2) Übergangsmatrizen sind immer stochastisch. ☐

(3) Übergangsmatrizen sind immer invertierbar. ☐

(4) Wenn jede Spalte einer Matrix die Summe Eins hat, dann ist die Matrix stochastisch. ☐

(5) Das Produkt von zwei stochastischen Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix. ☐

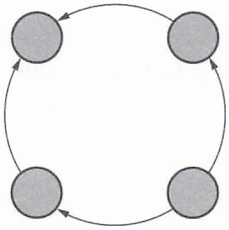
(6) Die stabile Verteilung ändert sich nicht, wenn man die Anfangsverteilung ändert. ☐

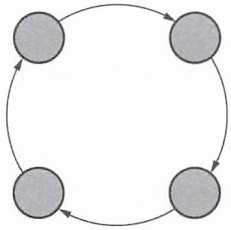
(7) Quadriert man eine Grenzmatrix, so erhält man wieder die Grenzmatrix. ☐

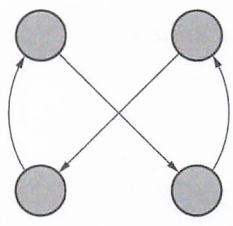
2 Welche Matrizen beschreiben einen zyklisch periodischen Prozess?

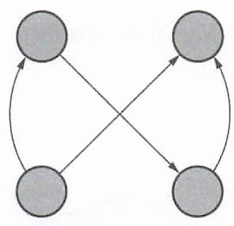
☐ $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ ☐ $D = \begin{pmatrix} 10 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 Welche Graphen könnten einen zyklisch periodischen Prozess beschreiben?

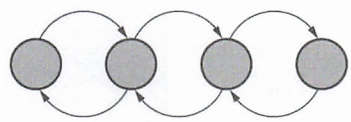
(1) ☐ 

(2) ☐ 

(3) ☐ 

(4) ☐ 

4 Der Graph beschreibt einen stochastischen Prozess. Übergänge finden genau dann statt, wenn Pfeile vorhanden sind. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen zu der zum Graphen gehörenden Übergangsmatrix M an.



(1) M enthält genau zwei Einsen. ☐

(2) Auf der Hauptdiagonalen von M befinden sich nur Nullen. ☐

(3) Es gibt eine Zeile, in der nur Nullen vorkommen. ☐

(4) Es gibt eine Zeile mit der Summe Eins. ☐

(5) Es gibt eine Zeile, deren Summe größer als Eins ist. ☐

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Rund um Matrizen

1 *Untersuchungen an stochastischen Matrizen*

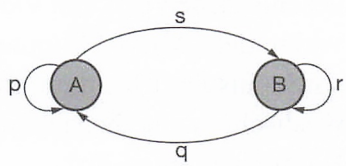
Begründen Sie folgende Aussagen für (2 × 2)-Matrizen.

a) Die Summe zweier stochastischer Matrizen ist keine stochastische Matrix.

b) Multipliziert man eine stochastische Matrix mit einer reellen Zahl ungleich Eins, so erhält man keine stochastische Matrix.

c) Das Produkt zweier stochastischer Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix.

d) Beschreibt der Graph einen stochastischen Prozess mit der Übergangsmatrix U, dann gilt $\det(U) = p - q$.

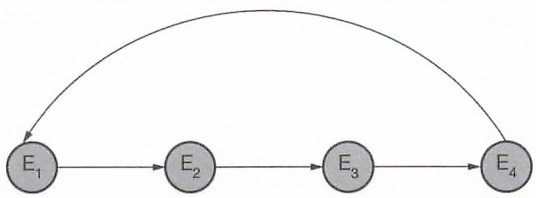


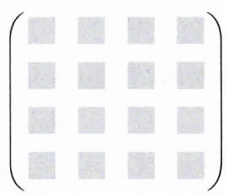
e) Eine stochastische Matrix $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn $p \neq q$ gilt.

2 *Wachstumsmodelle*

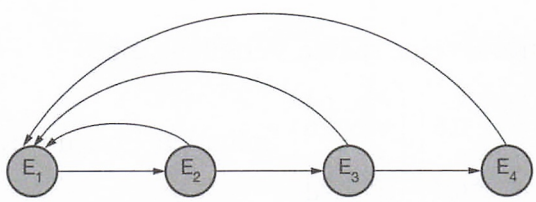
Die gezeigten Graphen beschreiben die Entwicklung zweier unterschiedlicher Populationen. Pfeile bedeuten von Null verschiedene Übergänge. Die Reihenfolge der Reihen und Spalten in der Matrix entspricht der Nummerierung der Zustände.

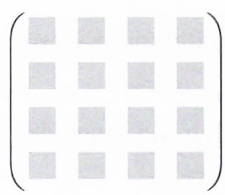
(A)





(B)





a) Markieren Sie in den Matrizen die von Null verschiedenen Einträge und beschreiben Sie die entstehenden Muster für beide Fälle in Worten.

b) Geben Sie für beide Populationstypen, verallgemeinert für eine (n × n)-Matrix, diejenigen Matrixeinträge a_{ik} an, die von Null verschieden sind.

c) Geben Sie zu jedem Populationstyp ein Beispiel an.

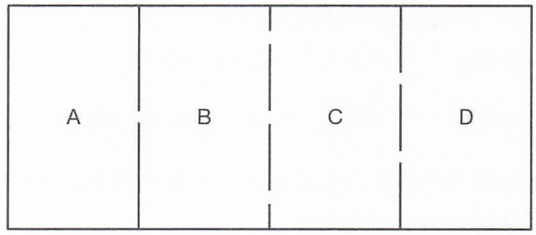
3 *Prozesse als Folgen*

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Durch Potenzen von M wird eine Folge von Verteilungen erzeugt: $M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Erstellen Sie einen Übergangsgraphen, eine Wertetabelle für $n = 0, 1, ..., 5$ und finden Sie explizite Darstellungen der drei Folgen (x_n), (y_n) und (z_n).

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Mäuselabyrinth



Eine Versuchsanordnung zur Untersuchung des Verhaltens von Mäusen besteht aus einer geschlossenen Box mit vier Kammern. Die Kammern sind durch Öffnungen miteinander verbunden. Alle 10 Minuten ertönt ein lauter Knall, wodurch die Mäuse in Panik geraten und sofort aus ihrer Kammer fliehen. Dabei wählen sie einen der Ausgänge zufällig aus und wechseln in eine benachbarte Kammer. Zu Beginn des Experiments werden 300 Mäuse in Kammer A eingesetzt.

a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix U.

b) Wie viele Mäuse erwarten Sie nach 30 Minuten in Kammer D?

c) Berechnen Sie aus der Anfangsverteilung die nächsten sechs Folgeverteilungen. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und begründen Sie diese im Sachzusammenhang.

d) Wird die Verteilung für dieses Modell irgendwann stabil?

e) Berechnen Sie die Matrix U^2.

Zur Kontrolle: $U^2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}15 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}85 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

f) Es soll nun untersucht werden, ob es zur Matrix U^2 eine stabile Verteilung gibt.

(1) Begründen Sie, dass das LGS $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}15 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}85 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ mit $a + b + c + d = 300$

unterbestimmt ist.

(2) Ein CAS liefert folgende Lösung der entsprechenden Vektorgleichung:

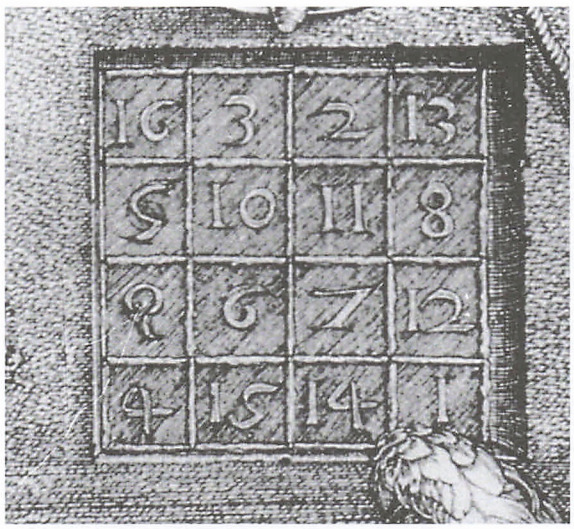
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.6 \\ 0.75 & 0 & 0.85 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \wedge a + b + c + d = 300,\ \{a, b, c, d\}\right)$$

$$a + 0.5 \cdot d = 50 \ \wedge \ b - 2 \cdot d = 0 \ \wedge \ c + 2.5 \cdot d = 250$$

Geben Sie drei mögliche stabile Verteilungen an. Wie viele stabile Verteilungen gibt es, wenn die Einträge natürliche Zahlen sein sollen?

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Dürermatrix



Kupferstich Melancholie von Albrecht Dürer

Ein magisches Quadrat ist ein Quadrat, in dem Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen gleich groß sind.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\text{Dürer} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

ein magisches Quadrat bildet.

b) Ist die Matrix $(\text{Dürer})^2$ auch ein magisches Quadrat?

c) Man kann das Dürerquadrat auch als Linearkombination der folgenden acht Matrizen erzeugen.

Matrix A $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix B $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix C $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix D $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrix E $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix F $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrix G $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrix H $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bestätigen Sie, dass die Matrixgleichung

$\text{Dürer} = -4A + 8B + 14C - 5D - 1E + 6F + 16G$

erfüllt ist.

Analysieren Sie den Aufbau der acht Matrizen.
Bilden Sie $A + D + E + H$ und $B + C + F + G$. Was fällt Ihnen auf?

d) Ist das Matrizenprodukt $A \cdot \text{Dürer}$ auch ein magisches Quadrat?

e) Durch Spaltenvertauschungen der Matrix Dürer wurde die Matrix X erzeugt.

$$\text{Dürer} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 16 & 3 \\ 11 & 8 & 5 & 10 \\ 7 & 12 & 9 & 6 \\ 14 & 1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvertauschungen lassen sich auch durch Multiplikation der Matrix Dürer mit einer (4×4)-Matrix nur mit den Einträgen 0 und 1 erhalten.
Wie sieht diese (4×4)-Matrix aus?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Fibonacci

1 *Fibonacci-Matrix*

Ein Sender hat die beiden Zeichen P für Punkt und S für Strich zur Verfügung. Die Übermittlung eines Punktes benötigt eine Zeiteinheit, die eines Striches dagegen zwei Zeiteinheiten.

a) In der Tabelle ist dargestellt, wie viele verschiedene Zeichenfolgen (Nachrichten) aus Punkten und Strichen pro Zeiteinheit übertragen werden können.

Zeiteinheiten	Übertragungsmöglichkeiten	Anzahl der Nachrichten
1	P	1
2	PP; S	2
3	PPP; PS; SP	
4		5
5		
6		
7		

Füllen Sie die Lücken aus.

b) Die Folge 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … bezeichnet man als Fibonacci-Folge, nach dem Mathematiker Leonardo da Pisa, auch FIBONACCI genannt.
Die Folge lässt sich leicht fortsetzen, wenn man die Struktur ihrer Elemente näher betrachtet.

Bestätigen Sie für die oben gegebenen Elemente das Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge:
$a(n+2) = a(n) + a(n+1)$ mit $a(0) = 0$ und $a(1) = 1$.

c) Die Fibonacci-Folge lässt sich auch mithilfe der Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugen.

Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestätigen Sie dies entsprechend für weitere Elemente der Fibonacci-Folge.

d) Berechnen Sie die Potenzen F^2, F^3 und F^4. Was stellen Sie fest?

2 *Fibonaccis Kaninchen*

Leonardo von Pisa (ca. 1170–1240), genannt FIBONACCI, untersuchte das Wachstum von Kaninchen nach folgendem Modell:
Kaninchen gebären ab dem zweiten Monat nach ihrer Geburt und jedes gebärfähige Kaninchenpaar bringt pro Monat ein neues Paar zur Welt. Im betrachteten Zeitraum sterben keine Kaninchen. Wie viele Kaninchenpaare gibt es nach einem Jahr, wenn man mit einem Paar neugeborener Kaninchen beginnt?
Bearbeiten Sie das Problem mithilfe eines Übergangsgraphen und einer Übergangsmatrix.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Salatteller

Ein Kantinenbetreiber mit mehreren Filialen bietet drei verschiedene Salatteller an: Salatteller S_1, Salatteller S_2 und Salatteller S_3. Die Salatteller werden aus Blattsalat, Gurken, Radieschen, Tomaten und Paprika zubereitet. Die pro Salatteller benötigten Mengen sind in der Tabelle zusammengefasst.

	Salatteller 1	Salatteller 2	Salatteller 3
Blattsalat	75	75	50
Gurken	100	50	75
Radieschen	25	25	0
Tomaten	0	100	75
Paprika	50	0	50

Alle Angaben in Gramm (g).

a) Eine Filiale hat einen Vorrat von 5,75 kg Blattsalat, 7 kg Gurken, 1,25 kg Radieschen, 5 kg Tomaten sowie 3,75 kg Paprika.
Wie viele der Salatteller S_1, S_2 und S_3 können aus diesen Vorräten zubereitet werden, wenn die vorhandenen Mengen an Blattsalat, Gurken und Radieschen vollständig aufgebraucht werden sollen?
Welche Mengen an Tomaten und Paprika bleiben dann übrig?

b) Eine Schule möchte mit dem Kantinenbetreiber für ihre Cafeteria einen Liefervertrag abschließen. In der Tabelle sind die Bestellungen der jeweiligen Salatteller an den entsprechenden Wochentagen zusammengefasst.

	Salatteller 1	Salatteller 2	Salatteller 3
Montag	15	25	30
Dienstag	25	18	37
Mittwoch	20	20	40
Donnerstag	38	36	31

Welche Mengen der einzelnen Zutaten werden an den jeweiligen Wochentagen benötigt?
Reichen 20 kg Tomaten für die vier Tage aus?

ISBN: 978-3-507-85586-1

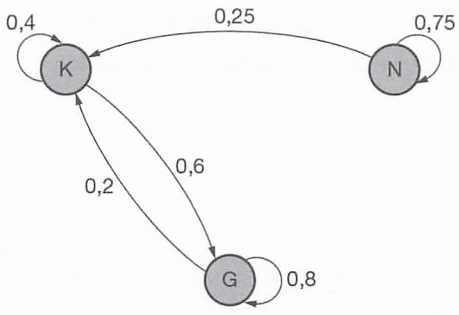
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Verlauf einer Krankheit

Der Verlauf einer Krankheit soll mithilfe eines mathematischen Modells untersucht werden. Dazu werden folgende Annahmen gemacht:

(1) Die Bevölkerung wird in Nicht Erkrankte (N), Kranke (K) und nach der Krankheit Genesene (G) eingeteilt.

(2) Zwischen den Gruppen finden wöchentlich Übergänge statt, die durch den nebenstehenden Graphen beschrieben werden.



(3) Die Größe der Bevölkerungsgruppe ändert sich in dem betrachteten Zeitraum nicht und beträgt 2400 Personen.

(4) Die Übergangsraten zwischen den einzelnen Gruppen bleiben in dem betrachteten Zeitraum konstant.

a) Stellen Sie eine Übergangsmatrix M auf. Verwenden Sie bei Zeilen und Spalten die Reihenfolge K – N – G.

b) Berechnen Sie die Situation zwei Wochen nach Ausbruch der Krankheit.

c) Es gilt $M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}32 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}4 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ (Werte gerundet).

(1) Interpretieren Sie die beiden Nullen im Sachzusammenhang und begründen Sie, dass hier bei allen Potenzen von M Nullen stehen.

(2) Interpretieren Sie die Zahlen 0,32 und 0,4 im Sachzusammenhang.

d) (1) Stellen Sie eine Vermutung über eine stabile Verteilung an.

(2) Leiten Sie den stabilen Vektor mithilfe eines LGS her.

e) Das erste Modell wird nun erweitert:
Bei der Behandlung der Krankheit wird ein Antibiotikum eingesetzt, das anfangs gute Erfolge zeigt. Nach einigen Wochen entwickeln die Erreger jedoch eine gewisse Resistenz, sodass 10 % der Erkrankten innerhalb einer Woche sterben und nur noch 50 % genesen.

Stellen Sie für die neue Situation einen Übergangsgraphen auf und beurteilen Sie begründet die langfristige Entwicklung der Population.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Mitgliederentwicklung im Tennisclub

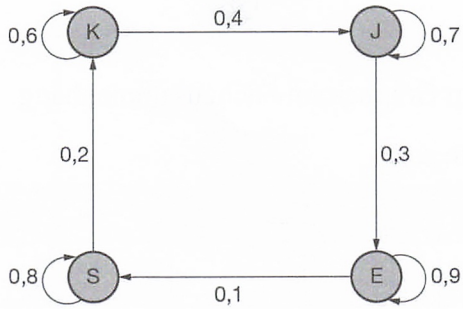
Ein Tennisclub soll gegründet werden und die Organisatoren machen sich Gedanken über die Vereinsordnung. Bezüglich der Mitgliederzahlen wird folgender Vorschlag gemacht:

(1) Die Mitgliederzahl wird auf 250 begrenzt.

(2) Die Mitglieder werden in vier Altersgruppen eingestuft: Kinder und Jugendliche (K), Junioren (J), Erwachsene (E) und Senioren (S).

(3) Scheiden Mitglieder der Altersgruppen (K), (J) oder (E) aus, so werden sie durch Mitglieder ihrer Altersgruppe ersetzt. Dabei geht man davon aus, dass es jeweils genügend Bewerber gibt. Für jedes Mitglied, das aus der Seniorengruppe ausscheidet, wird ein neues Mitglied im Bereich Kinder und Jugendliche aufgenommen.

(4) Von anderen Vereinen weiß man, welche durchschnittlichen Anteile der einzelnen Altersgruppen jährlich zur nächsten wechseln. Dies ist in dem folgenden Graphen dargestellt.



a) Bei der Vereinsgründung ist folgende Verteilung auf die Altersgruppen geplant:

Altersgruppe	(K)	(J)	(E)	(S)
Anzahl	20	50	130	50

Berechnen Sie die Verteilung der Mitglieder nach einem Jahr und nach zwei Jahren.

b) Wie entwickeln sich die Mitgliederzahlen der jeweiligen Altersgruppen langfristig nach diesem Modell?

Es wird folgende Änderung vorgeschlagen:
Von den ausscheidenden Senioren soll nur die Hälfte durch Kinder und Jugendliche ersetzt werden. Die andere Hälfte soll zu gleichen Teilen durch Junioren und Erwachsene ersetzt werden.

c) Erstellen Sie einen entsprechenden Übergangsgraphen und die dazugehörende Übergangsmatrix.

d) Wie würden sich jetzt langfristig die Mitgliederzahlen der jeweiligen Altersgruppen entwickeln?

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Insektenpopulation

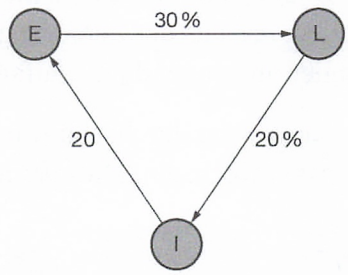
Die Entwicklung einer Insektenpopulation lässt sich näherungsweise durch folgendes Modell beschreiben:

(1) Die Insekten legen Eier, aus denen nach einem Monat Larven schlüpfen.

(2) Aus den Larven werden nach einem weiteren Monat Insekten.

(3) Nach einem Monat legen die Insekten Eier und sterben danach.

(4) Das Modell wird durch folgenden Graphen dargestellt:



a) Erläutern Sie die Zahlen im Graphen im Sachzusammenhang.

b) Füllen Sie folgende Tabelle aus.

Zeit in Monaten	0	1	2	3	4	5	6
Eier	1000						
Larven	300						
Insekten	100						

c) Stellen Sie zu dem Prozess eine Übergangsmatrix U auf.

d) Berechnen Sie U^3 und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

e) Stellen Sie zu U die inverse Matrix auf und berechnen Sie, wie viele Eier, Larven und Insekten einen Monat vor dem Beobachtungsbeginn (Monat 0) bei Teilaufgabe b) vorhanden waren.

f) Nach dem 6. Monat (Tabelle Teil b)) haben sich durch Rodung plötzlich Umwelteinflüsse geändert. Die weitere Entwicklung der Insektenpopulation ist in folgender Tabelle dargestellt.

Zeit in Monaten	7	8	9	10	11	12	13
Eier	2880	2160	1440	2880	2160	1440	2880
Larven	288	576	432	288	576	432	288
Insekten	108	72	144	108	72	144	108

Bestimmen Sie einen passenden Übergangsgraphen und begründen Sie die nun entstandene Periodizität.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Bäckereien

In einer Ortschaft gibt es drei Bäckereien (B1, B2, B3). Zusammen versorgen sie 600 Kunden. Diese Anzahl bleibt für die folgenden Betrachtungen konstant. Durch die unterschiedlichen Wochenangebote wechseln die Kunden von Zeit zu Zeit ihren Bäcker. Eine Statistik aus dem vergangenen Jahr zeigt im Mittel das folgende wöchentliche Wechselverhalten:

	von B1	von B2	von B3
nach B1	60 %	10 %	10 %
nach B2	20 %	70 %	10 %
nach B3	20 %	20 %	80 %

a) Erstellen Sie einen passenden Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix.

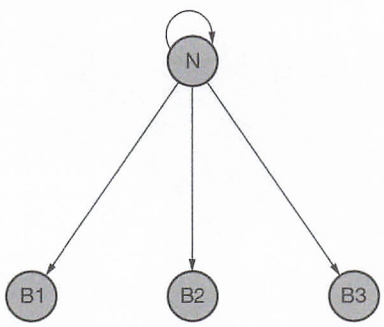
b) Füllen Sie folgende Tabelle aus.

Zeit in Wochen	0	1	2	3	4
Kunden B1	200				
Kunden B2	100				
Kunden B3	300				

Begründen Sie die Besonderheit der 3. Zeile mithilfe der Übergangsmatrix.

c) Berechnen Sie die Kundenverteilung, die sich langfristig einstellt.

d) Durch ein Neubaugebiet kommen wöchentlich zu jedem Bäcker jeweils fünf neue Kunden. Dazu kann man im Graphen einen Zustand (N) ergänzen, der im Kundenvektor den Wert 1 hat. Die Übergänge zwischen den Bäckereien wurden zur besseren Übersicht weggelassen. Beschriften Sie den Graphen passend, stellen Sie die Übergangsmatrix auf und vervollständigen Sie die Tabelle.



Zeit in Wochen	0	1	2
Kunden B1	200		
Kunden B2	100		
Kunden B3	300		
Neubaugebiet N	1		

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Verkettung von Abbildungen

1 *Matrizen bestimmen*

a) Bestimmen Sie die Matrix J für die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden. Sie dürfen dabei nach einer Methode Ihrer Wahl vorgehen.

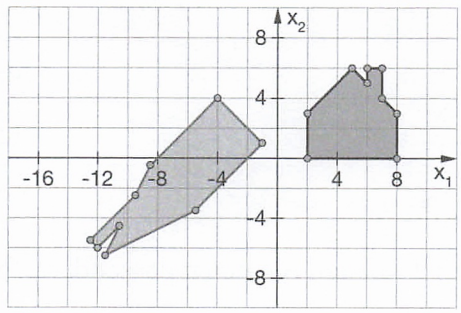
b) Um welche Abbildung handelt es sich bei der Matrix $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Geben Sie eine kurze Begründung oder Skizze.

c) *„Wenn man die Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden mit einer Punktspiegelung am Ursprung verkettet, dann erhält man die Abbildung aus b).“* Beweisen Sie die Aussage.

2 *Verkettung prüfen*

Mit der Abbildung $M = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$ wurde aus dem Haus (rechts) das Bild des Hauses (links) erzeugt.



Mit etwas Rechenaufwand lässt sich herausfinden, dass die folgenden drei linearen Abbildungen miteinander verknüpft wurden (Reihenfolge beachten):

Zunächst (A): eine Streckung entlang der x_1-Achse mit dem Streckfaktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$, gefolgt von

(B): einer Streckung entlang der x_2-Achse mit dem Streckfaktor $\frac{\sqrt{18}}{2}$ und am Ende

(C): eine Drehung um +135°.

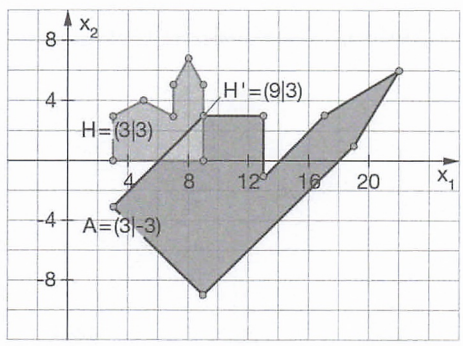
a) Bestimmen Sie die Matrizen A, B und C der drei einzelnen Abbildungen.
Tipp: $\sin(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos(135°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) Prüfen Sie nach, dass tatsächlich $M = C \cdot (B \cdot A)$ erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass man nicht die gleiche Abbildung erhält, wenn man die Drehung als erstes durchführt. Berechnen Sie dazu $\widetilde{M} = B \cdot (A \cdot C)$.

3 *Zum Schluss etwas Knobelei*

Auch die rechts zu sehende Abbildung entsteht aus der Verkettung einer Streckung entlang der x_1-Achse, einer Streckung entlang der x_2-Achse und einer Drehung um den Ursprung.



a) Bestimmen Sie den Drehwinkel sowie den Streckfaktor entlang der x_1-Achse.

b) Für Tüftler: Bestimmen Sie auch den Streckfaktor entlang der x_2-Achse.

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Additionstheoreme mit Abbildungsgeometrie

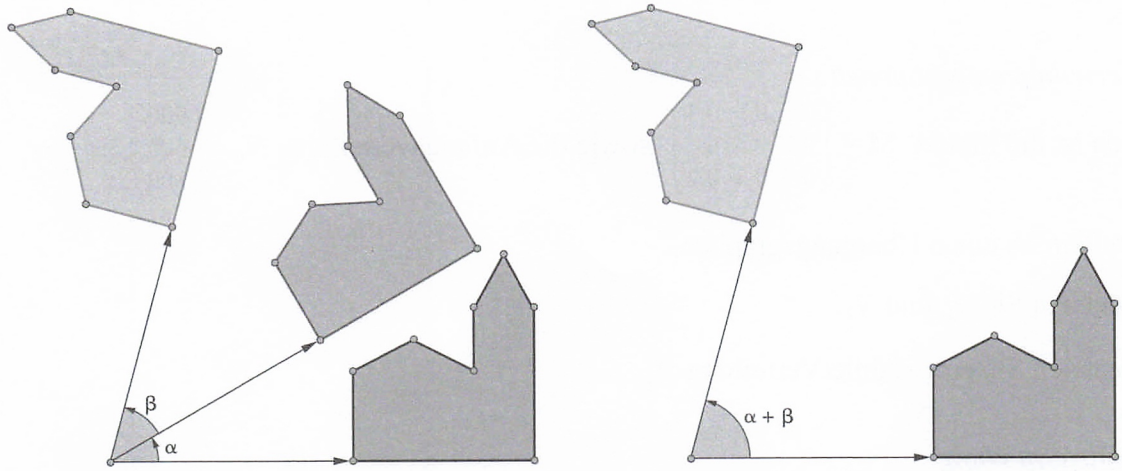
In verschiedenen Anwendungssituationen ist es erforderlich, trigonometrische Terme wie $\cos(\alpha + \beta)$ oder $\sin(\alpha + \beta)$ zu bearbeiten. Wie geht das überhaupt?

In einer Formelsammlung findet man die folgenden Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

Wie kommt man zu diesen Darstellungen?
Um diese Frage zu beantworten, beschäftigen wir uns mit Drehungen in der Ebene.



Eine Drehung um den Winkel α, gefolgt von einer Drehung um den Winkel β ist eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$.

a) Notieren Sie die Matrizen D_α, D_β und $D_{\alpha+\beta}$ der drei Drehungen.

b) Bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen werden die entsprechenden Matrizen multipliziert, das nutzen wir nun aus.
Multiplizieren Sie D_β mit D_α und vergleichen Sie das Ergebnis mit $D_{\alpha+\beta}$.
Die Terme an den entsprechenden Positionen der Matrizen müssen gleich sein. Lesen Sie die Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ ab und notieren Sie diese.

c) Leiten Sie daraus Formeln für $\cos(2\alpha)$ und $\sin(2\alpha)$ her.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Check up

1 *Rechnen mit Matrizen*

Berechnen Sie, falls möglich. Geben Sie eine kurze Begründung an, falls eine Berechnung nicht möglich ist.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ -1 \ -4)$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

2 *Verteilungen bestimmen*

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ sowie die Anfangsverteilung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$.

a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen.

b) Berechnen Sie $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

c) Berechnen Sie eine stabile Verteilung $\vec{v}_S$.

3 *Autovermietung*

In einer Autovermietung werden die Autos mit höchstens 5000 gefahrenen Kilometern als neu (N) und die übrigen als alt (A) eingestuft. Jeden Monat werden im Mittel 10 % der Altwagen verkauft und durch Neuwagen ersetzt. Bei den Neuwagen erreichen monatlich im Durchschnitt 30 % die Kilometergrenze und werden als Altwagen eingestuft.

a) Beschreiben Sie diesen Prozess durch eine Übergangsmatrix (Spaltenreihenfolge (N)–(A)).

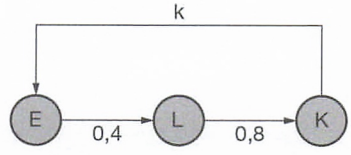
b) Zurzeit besitzt die Firma 200 Neuwagen und 100 Altwagen. Berechnen Sie die Verteilung drei Monate später und bestimmen Sie eine stabile Verteilung.

c) Welche Bedeutung hat die Matrix $M^6 \approx \begin{pmatrix} 0{,}285 & 0{,}238 \\ 0{,}715 & 0{,}762 \end{pmatrix}$ im Sachkontext?

d) Geben Sie eine Matrix an, die die Übergänge im Jahresrhythmus beschreibt.

4 *Populationsentwicklung*

Eine Käferart entwickelt sich über die Stadien Eier-Larven-Käfer. Der Übergangsgraph beschreibt die jährliche Entwicklung.



a) Welche Bedeutung hat der Parameter k im Sachkontext?

b) Für welchen Wert von k ist der Prozess zyklisch periodisch?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest

1 *Rechnen mit Matrizen*

a) Berechnen Sie die folgenden Matrixausdrücke.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -p \\ p & 1 \end{pmatrix}$

b) Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Matrizen A und B multiplizieren und welche Form hat dann das Produkt $A \cdot B$?

c) Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Matrizen A und B addieren und welche Form hat dann die Summe $A + B$?

d) Beweisen Sie, dass das Kommutativgesetz für die Addition von (2×2)-Matrizen gilt.

e) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass das Kommutativgesetz der Multiplikation für (2×2)-Matrizen nicht gilt.

f) Berechnen Sie die inverse Matrix bezüglich der Multiplikation zu $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

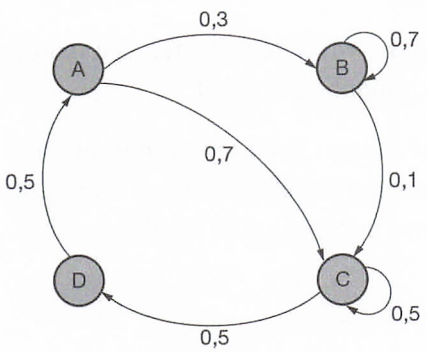
g) Für welchen Wert von p ist $M_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar?

2 *Prozessmatrizen finden*

Im Folgenden werden Prozesse auf unterschiedliche Arten beschrieben. Finden Sie jeweils eine passende Übergangsmatrix M. Die Zeilen und Spalten sollen so geordnet sein, dass sie die Zustände in alphabetischer Reihenfolge berücksichtigen.

a) In einer Tiergruppe gibt es Jungtiere (J), erwachsene Tiere (E) und Alttiere (A). Die folgenden Angaben beziehen sich auf ein Jahr. Es überleben 60 % der Jungtiere und werden zu erwachsenen Tieren. Bei den erwachsenen Tieren sterben 20 % und der Rest wird zu Alttieren. Die Alttiere sterben alle innerhalb des Jahres. Im Mittel haben erwachsene Tiere drei Nachkommen und Alttiere einen Nachkommen pro Jahr.

b)



c) Für einen stochastischen Prozess gilt:

Generation	A	B
0	400	200
1	200	400
2	280	320
3	248	352

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 *Ableitungsmatrix*

Es bezeichne G_3 die Menge aller ganzrationalen Funktionen vom Grad $n \leq 3$. Dann lässt sich ein Element $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ aus G_3 durch einen Vektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ darstellen.

Finden Sie eine Matrix A, sodass man die Ableitung durch $\vec{f}' = A \cdot \vec{f}$ berechnen kann.

4 *Tierreservat*

Ein eingezäuntes Reservat wird in die Regionen Bergland (B), Flussebene (F) und Steppe (S) eingeteilt. Bei einer Ziegenpopulation wird der monatliche Wechsel der Tiere zwischen den einzelnen Regionen untersucht. In einem ersten Modell bleibt die Anzahl der Tiere konstant. Beobachtungswerte aus einem Jahr wurden gemittelt und in der nebenstehenden Übergangstabelle für den monatlichen Wechsel festgehalten. Zum jetzigen Zeitpunkt befinden sich 500 Ziegen im Bergland, 300 Ziegen in der Flussebene und 400 Ziegen in der Steppe.

von / nach	B	F	S
B	0,4	0,1	0,2
F	0,2	0,6	0,2
S	0,4	0,3	0,6

a) Erstellen Sie eine Übergangsmatrix U und einen Übergangsgraphen.

b) Erstellen Sie mithilfe des Modells eine Prognose für die Verteilung der Ziegen in einem Monat und in zwei Monaten.

c) Berechnen Sie eine stabile Verteilung.

d) Durch einen Bergrutsch wird der Weg zwischen Bergland und Steppe unpassierbar. Die Hälfte der Ziegen, die diesen Weg gegangen wären, bleiben in ihrer Region, die anderen wechseln in die noch erreichbare Region. Erstellen Sie für diese Situation die Übergangsmatrix U_B.

Das erste Modell (Matrix U) wird nun erweitert, indem die Geburten- und Sterberaten berücksichtigt werden. Dadurch ergibt sich eine neue Übergangsmatrix U′.

$$U' = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

e) Interpretieren Sie die Veränderungen zu U im Sachkontext.

f) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Ziegen nach 1, 2 und 3 Monaten. Prüfen Sie dann, ob die Gesamtanzahl der Ziegen in dieser Anfangsphase exponentiell wächst.

g) Die Tabelle zeigt die Entwicklung der Gesamtanzahl der Ziegen nach einem halben Jahr (Werte gerundet). Begründen Sie, dass sich die Gesamtanzahl der Ziegen langfristig gut durch eine Exponentialfunktion N(t) beschreiben lässt und geben Sie die Funktionsgleichung an.

Monate	6	7	8	9	10
Gesamtanzahl	1661	1771	1888	2012	2145

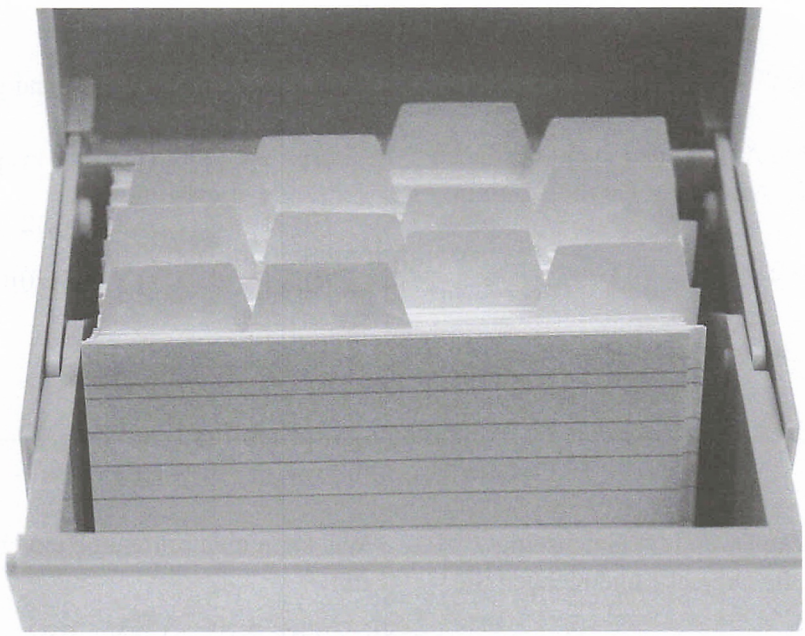
h) Berechnen Sie mithilfe der Funktion N(t) die Gesamtanzahl der Ziegen nach einem Jahr.

i) Nach welcher Zeit erreicht die Population eine Gesamtanzahl von 3000 Ziegen?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Grundwissen



© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

1

Welche der Vektoren sind parallel, welche haben die gleiche Länge?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2

A ist durch Verschiebung um $\vec{v}$ auf A′ verschoben worden. Ordnen Sie zu.

(I) $A = (1|2|4),\ A' = (3|4|-2)$
(II) $A = (2|3|-4),\ A' = (4|1|2)$

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

3

Wahr oder falsch?

Wenn die Punkte A, B, C und D auf derselben Ebene liegen, ist ABCD ein Parallelogramm, falls

(I) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

oder

(II) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$

gilt.

4

Welche der Strecken $\overline{PQ}$ sind gleich lang?

(I) $P = (1|2|3),\ Q = (2|3|1)$

(II) $P = (1|2|3),\ Q = (2|2|0)$

(III) $P = (0|1|2),\ Q = (1|0|0)$

5

Sind die Dreiecke D_1 und D_2 gleichseitig? Skizzieren Sie die Dreiecke und rechnen Sie.

D_1: $A = (2|0|0),\ B = (0|2|0),\ C = (4|2|3)$

D_2: $A = (2|0|0),\ B = (0|2|0),\ C = (0|0|2)$

6

Wie kann man prüfen, ob ein ebenes Viereck mit

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ein Rechteck ist?

7

M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Ergänzen Sie die fehlenden Punkte.

a) $A = (1|4|-1),\ B = (-5|2|3),\ M = (\square|\square|\square)$

b) $A = (1|5|-3),\ B = (\square|\square|\square),\ M = (3|3|-2)$

8

Wahr oder falsch?

(I) Alle Punkte, die die z-Koordinate 3 haben, liegen auf einer parallelen Ebene zur xy-Ebene.

(II) Alle Punkte, die auf einer parallelen Ebene zur xy-Ebene liegen, haben die z-Koordinate 3.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

9

Was gehört zusammen?

(A) alle Punkte (x|y|z) mit y = 0
(B) alle Punkte (x|y|z) mit z = 3 oder z = –3

(I) eine Parallele zu einer der Koordinatenachsen
(II) zwei zu einer der Koordinatenebenen parallele Ebenen
(III) eine der Koordinatenebenen

10

Weshalb kann $\vec{a}$ nicht Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sein?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11

Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten, sodass g und k identisch sind?

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};\quad k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \square \\ -4 \\ \square \end{pmatrix}$$

12

Für drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:
$\vec{a}$ ist linear abhängig von $\vec{b}$ und $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Was weiß man über die Längen der drei Vektoren:

(I) wenn $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$ gilt?

(II) wenn $|\vec{a}| < |\vec{b}| + |\vec{c}|$ gilt?

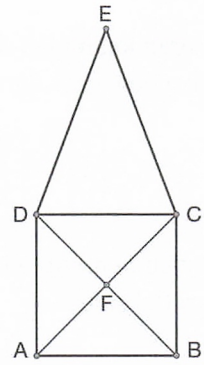
13

Welche Vektoren sind gleich lang, welche sind orthogonal?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

14

Welche Vektoren sind gleich, welche sind Vielfache voneinander, aber nicht gleich?



15

Eine Geradengleichung ist gegeben durch:

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie muss der Parameter t jeweils gewählt werden, dass die Punkte P = (–6|3|11), Q = (–2|2|9) sowie R = (6|0|5) auf der Geraden erreicht werden?

16

Woran kann man, ohne zu rechnen, erkennen, dass die Punkte

P = (1|3|0), Q = (4|7|2) und R = (7|–3|0)

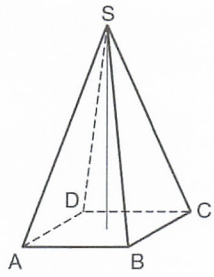
nicht auf einer Geraden liegen?

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

17

Die Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{BS}$ der Pyramide mit den Eckpunkten
A = (2|–2|0), B = (2|2|0),
C = (–2|2|0), D = (–2|–2|0)
und S = (0|0|6) liegen auf windschiefen Geraden.



Bestätigen Sie dies anschaulich.

18

Welche Endpunkte P und Q hat die Strecke

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ 1 \le t \le 3?$$

Wie lang ist diese Strecke?

19

Welche der Geraden verläuft durch
P = (0|–5|9) und liegt in der yz-Ebene?

(I) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$

(II) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-3\\6\end{pmatrix}$

20

Wahr oder falsch?

Wenn eine Gerade parallel zur x-Achse ist, hat sie genau einen Spurpunkt.

21

Woran kann man ohne ausführliche Rechnung erkennen, dass die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$$

keinen Schnittpunkt haben und auch nicht parallel sind?

22

Welche der Ebenen enthält den Punkt
P = (3|2|5)?

$E_1: x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3;$

$$E_2: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix};\quad E_3: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

23

Die Ebene E hat die Spurpunkte A = (2a|0|0), B = (0|a|0) und C = (0|0|a) mit $a \neq 0$.

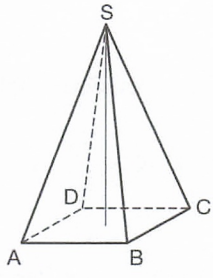
Welcher der Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

ist ein Normalenvektor von E?

24

Liegt die Seitenfläche BCS der Pyramide mit den Eckpunkten
B = (2|2|0), C = (–2|2|0)
und S = (0|0|6)



auf der Ebene $E_1: 3y + z = 6$
oder
auf der Ebene $E_2: -3y + z = 6$?

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

25

Ergänzen Sie die fehlenden Eintragungen, sodass g und h dieselbe Gerade beschreiben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \square \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ \square \\ 2 \end{pmatrix}$$

26

Ist die Gerade $h: \vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

orthogonal

zur Ebene $E: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

27

Welcher der Punkte

$P = (3|-1|4)$, $Q = (5|-2|5)$ und $R = (-1|1|-1)$

liegt auf welcher der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

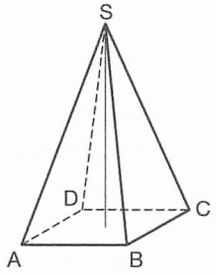
28

Welche der Pyramideneckpunkte

$A = (2|-2|0)$, $B = (2|2|0)$, $C = (-2|2|0)$, $D = (-2|-2|0)$ und $S = (0|0|6)$

liegen auf der Ebene

$E: 3x + z = 6$?



29

Die Ebene

$E: ax + by + cz = d$

soll den Ursprung enthalten.

Welche der Koeffizienten

a, b, c und d

sind damit festgelegt?

30

Ordnen Sie zu:

Die Menge $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ beschreibt

(I) ein Parallelogramm,
(II) einen Streifen zwischen zwei Parallelen,
(III) eine Ebene

für

(A) $1 \le r \le 4$; $s \in \mathbb{R}$,
(B) $r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$,
(C) $-2 \le r \le 5$; $7 \le s \le 15$.

31

Wahr oder falsch?

Eine Gerade, die genau einen Spurpunkt (Durchstoßpunkt mit einer der Koordinatenebenen) hat, ist parallel zu einer der Koordinatenachsen.

32

Gegeben ist die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie:

$P = (-6|3|11)$ und $Q = (-2|2|9)$ liegen auf der Geraden h.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

33

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

34

Ergänzen Sie die fehlende Eintragung, sodass

die Gerade $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ \square \\ 6 \end{pmatrix}$

orthogonal zu

der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

35

g und h sind parallele Geraden.
g liegt auf der Ebene E; h liegt nicht auf E.

Geben Sie für jede der drei Beziehungen zwischen den Abständen d(h, g) und d(h, E) an, ob sie gelten muss, gelten kann oder nicht gelten kann:

(1) $d(h, g) = d(h, E)$;
(2) $d(h, g) < d(h, E)$;
(3) $d(h, g) > d(h, E)$.

36

Wahr oder falsch?

(I) Wenn $\vec{v}$ ein Normalenvektor einer Ebene E_1 und einer Ebene E_2 ist, dann gilt: $E_1 = E_2$.

(II) Zwei Normalenvektoren der gleichen Ebene können windschief sein.

37

Zeigen Sie, dass der Abstand
des Punktes $P = (2|1|1)$
zu
der Ebene $E: 3x - 4y = 0$
größer als null ist.

38

g ist eine Gerade; E und F sind Ebenen.

Welche Lage haben Gerade und Ebenen zueinander, wenn Folgendes gilt:

(a) $d(g, E) \neq 0$;

(b) $d(E, F) = 0$;

(c) $d(E, F) \neq 0$?

39

Welche Lage haben die Geraden g und h und die Ebene E zueinander, wenn Folgendes gilt:

(a) $d(g, h) = 0$;

(b) $d(g, h) \neq 0$;

(c) $d(g, E) = 0$?

40

Welchen Winkel φ bilden eine Gerade

mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

und die Ebene $E: 3y + z = 12$?

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

41

Im Viereck ABCD mit A = (–1|–1|2), B = (–1|–1|0), C = (1|1|0) und D = (–1|1|1) gilt: $\alpha = 63{,}43°$; $\gamma = 50{,}77°$; $\delta = 101{,}54°$.

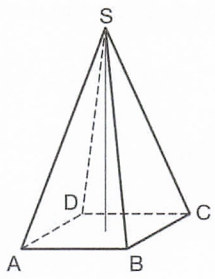
a) Bestätigen Sie die Gradzahl von α.

b) Der Winkel β müsste $360° - (\alpha + \gamma + \delta) = 144{,}26°$ betragen. Zeigen Sie, dass dies nicht der Fall ist. Geben Sie eine Begründung dafür.

42

Welchen Winkel bilden die Kante $\overline{BS}$ und die Flächendiagonale $\overline{BD}$?

A = (2|–2|0); B = (2|2|0); C = (–2|2|0); D = (–2|–2|0); S = (0|0|6)



43

Worum geht es?

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$.

- Man bestimmt die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$.
- Man fällt von einem beliebigen Punkt $L \in h$ das Lot auf E.
- Man bestimmt den Fußpunkt F des Lotes und berechnet d(L, F).

44

Was gehört zusammen?

Vektor	(I) $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$	(II) $\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\\2\end{pmatrix}$	(III) $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$
Länge des Vektors	(1) $3\sqrt{3}$	(2) 5	(3) 3
Winkel mit der z-Achse	(A) 90°	(B) 54,74°	(C) 48,19°

45

Gegeben sind die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

sowie die Ebene E: $x + z = 0$.

Welcher der Winkel

$\measuredangle(E, g)$; $\measuredangle(E, h)$; $\measuredangle(g, h)$

beträgt 90°?

46

Gegeben sind

$\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\-1\\\sqrt{8}\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}5\\-12\\0\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie

den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

sowie

den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

47

Der Winkel zwischen E: $2x + 2y = 7$

und $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$ beträgt α.

Ordnen Sie jeweils zu:

$a = 0$; $a = 1$; $a = 3$;

$\alpha = 30°$; $\alpha = 42{,}13°$; $\alpha = 0°$.

48

An den Punkt A werden alle Vektoren $\vec{v}$ angetragen, für die gilt:

(1) $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA}$ und (2) $|\vec{v}| \leq 1$.

Welche Fläche wird von den Spitzen der Vektoren $\vec{v}$ bedeckt?

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

49

Berechnen Sie die Matrizenprodukte

$$A = M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

50

Führen Sie folgende Rechnungen durch und formulieren Sie Ihre Erkenntnisse.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$$

51

Berechnen Sie die ersten fünf Potenzen von

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was gilt für M^n?

52

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

53

Welche Matrizen lassen sich addieren oder multiplizieren?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

54

Gelegentlich werden in Matrizen Zeilen und Spalten vertauscht, die Matrix wird „transponiert". Transponieren Sie die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. Die Transponierte von M wird dann mit M^T bezeichnet.

Zeigen Sie am Beispiel der Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

dass $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

55

Wahr oder falsch?

(1) Jede quadratische Matrix hat eine Inverse.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Einheitsmatrix.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

56

Welche Gesetze gelten für Matrizen?

a) $A \cdot B = B \cdot A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

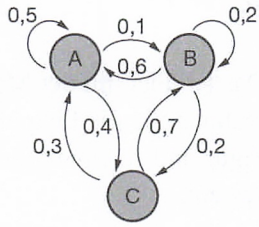
c) $A \cdot E = A$ (E Einheitsmatrix)

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

57

Ein Übergangsprozess wird durch den nebenstehenden Graphen beschrieben.



a) Stellen Sie eine Übergangsmatrix auf.

b) Zu Beginn gilt A = B = C = 100. Berechnen Sie die Verteilung nach einer und nach zwei Generationen.

58

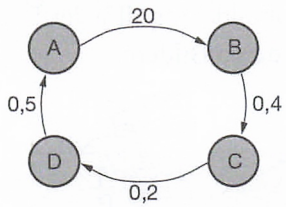
a) Zeichnen Sie zu der Übergangsmatrix einen passenden Übergangsgraphen.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}6 & 1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

b) Wie entwickelt sich die Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ langfristig (ohne Rechnung)?

59

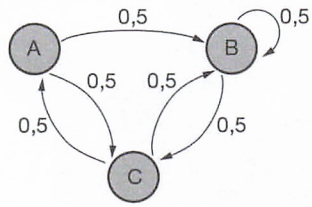
Die Abbildung zeigt einen zyklischen Prozess.



Untersuchen Sie den Prozess auf Periodizität und Stabilität. Wie viel Prozent der Population bei A sind nach drei Zyklen noch vorhanden?

60

Der Übergangsgraph beschreibt einen Prozess mit einer Zeiteinheit von einem Tag.



Zeichnen Sie den entsprechenden Graphen, wenn die Zeiteinheit zwei Tage beträgt.

61

Eine stochastische Matrix wird quadriert. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Einträge.

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & 0{,}2 \\ \blacksquare & 0{,}8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & 0{,}76 \end{pmatrix}$$

62

Berechnen Sie $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_{10}$. Runden Sie jeweils auf Zehntel.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 240 \end{pmatrix}$$

63

Berechnen Sie den stabilen Vektor und die Grenzmatrix.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

64

Bestimmen Sie die Parameter a, b und c der stochastischen Matrix, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0{,}55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

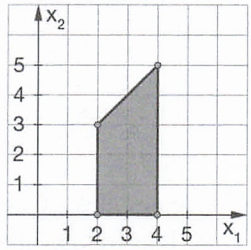
65

Eine Abbildung ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

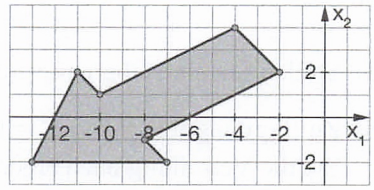
Berechnen Sie die Bildpunkte der Figur und zeichnen Sie das Bild im Koordinatensystem.



66

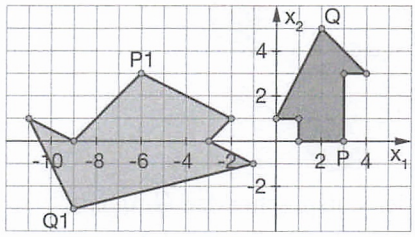
Das Bild ist mit der Matrix B entstanden. Berechnen Sie die Eckpunkte der ursprünglichen Figur und zeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



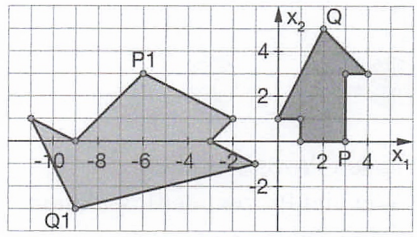
67

Bestimmen Sie die Matrix, die die rechte Figur auf die linke abbildet mit den Punkten P, Q und ihren Bildpunkten P1, Q1.



68

Bestimmen Sie die Matrix, die die rechte Figur auf die linke abbildet mithilfe der Einheitsvektoren und deren Bildern.



69

Erklären Sie anhand der Bilder der Einheitsvektoren, welche Abbildungen im Raum mit den folgenden Matrizen beschrieben werden:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

70

Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung im Raum, die eine Parallelprojektion in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf die Ebene mit der Gleichung

E: $x - y + z = 0$

beschreibt.

71

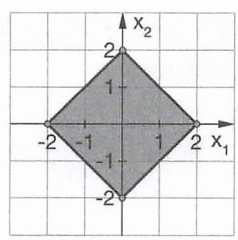
In der Ebene wird eine Figur zunächst an der x_2-Achse gespiegelt, danach um 45° um den Ursprung gedreht und anschließend an der x_1-Achse gespiegelt.

a) Bestimmen Sie die Matrizen der drei Abbildungen und die Matrix der gesamten Abbildung.

b) Wie sieht die Matrix der Abbildung aus, wenn die Reihenfolge der Abbildungen umgekehrt wird?

72

Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen, die das Quadrat auf sich selbst abbilden.



© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

73

Welche Gleichungen beschreiben einen Kreis mit dem Mittelpunkt M = (–3|1) und dem Radius r = 5?

(I) $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right)^2 = 25$

(II) $(x_1+3)^2+(x_2-1)^2=5$

(III) $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 10 = 25$

74

Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel K mit dem

Mittelpunkt M = (2|1|–3)

und dem

Radius r = 6.

75

Überprüfen Sie die Lage des Punktes

P = (3|0|4)

bezüglich der Kugel

K((1|1|1), 5).

76

Zeigen Sie, dass die Ebene

E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9 = 0$

die Kugel

K((0|1|1), 3).

nicht schneidet.

Beschreiben Sie einen Lösungsweg.

77

Bestimmen Sie die Tangentialebene

zur Kugel um den Ursprung

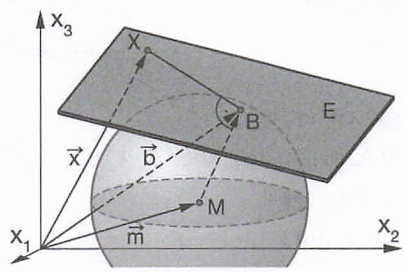
mit dem Radius r = 10

im Berührpunkt B = (6|0|8).

78

Was beschreibt die Gleichung

$(\vec{x}-\vec{b})=(\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})$?



79

Beschreiben Sie mithilfe einer Skizze einen Lösungsweg zur Bestimmung des Schnittkreises einer Kugel mit einer Ebene.

80

Welche Lagebeziehungen können zwei Kugeln zueinander haben?

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG

Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

ag

Erste Möglichkeit:
Man bestimmt mithilfe der Orthogonalitätsbedingung oder der Umkehrung des Satzes des Pythagoras einen der Innenwinkel des Vierecks. Beträgt dieser 90°, ist es ein Rechteck, sonst nicht.
Zweite Möglichkeit:
Man berechnet die Länge der Diagonalen. Sind beide gleich lang, ist es ein Rechteck, sonst nicht.

ae

(I) und (III) sind gleich lang.

(I) $d(P,Q)=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

(II) $d(P,Q)=\sqrt{(-1)^2+0^2+3^2}=\sqrt{10}$

(III) $d(P,Q)=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

ab

Parallel sind $\vec{c}$ und $\vec{d}$, denn es gilt:
$\vec{c}=-5\vec{d}$.

Gleich lang sind $\vec{b}$ und $\vec{d}$, denn es gilt:
$|\vec{b}|=|\vec{d}|=\sqrt{14}$.

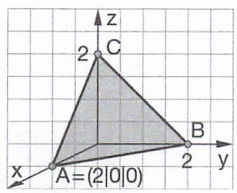
ai

(I) Wahr:
Alle Punkte mit der z-Koordinate 3 liegen auf der um 3 Einheiten nach oben verschobenen parallelen Ebene zur xy-Ebene.

(II) Falsch:
Alle Punkte müssen zwar dieselbe z-Koordinate haben, diese muss aber nicht 3 sein.

af

Anhand der Skizzen ist es schwer zu entscheiden, ob die beiden Dreiecke gleichseitig sind.



D_1 ist nicht gleichseitig;
es gilt z. B. $d(A, B)=\sqrt{8}$, aber $d(A, C)=\sqrt{17}$.
D_2 ist gleichseitig;
alle Seiten haben die Länge $\sqrt{8}$.

ad

(I) Wahr:
Das Viereck hat zwei gleich lange parallele Seiten. Somit müssen die beiden anderen Seiten auch gleich lang und parallel sein.

(II) Falsch:
A, B und C sowie C, D und A – und damit alle vier Punkte – liegen auf derselben Geraden.
Die Punkte B und D fallen zusammen.
Also ist ABCD kein Parallelogramm.

ah

a) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M=(-2|3|1)$

b) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B=(5|1|-1)$

ac

$\overrightarrow{AA'}=\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow$ (I) – a)

$\overrightarrow{AA'}=\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}\Rightarrow$ (II) – c)

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

ba

Jede Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ hat die z-Koordinate 0.
Dies ist bei $\vec{a}$ nicht der Fall.

bc

$\vec{a}$ ist linear abhängig von $\vec{b}$.

Wenn $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$ gilt,
dann ist $|\vec{b}| < |\vec{a}|$ und $|\vec{c}| < |\vec{a}|$.

Wenn $|\vec{a}| < |\vec{b}| + |\vec{c}|$ gilt,
dann ist $|\vec{b}| > |\vec{a}|$ oder $|\vec{c}| > |\vec{a}|$.

bj

(A) – (III)
Hier wird die xz-Ebene beschrieben.

(B) – (II)
Hier werden die beiden zur xy-Ebene parallelen Ebenen durch (0|0|3) und (0|0|–3) beschrieben.

bd

Gleich lang sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ (Länge 5).

Orthogonal sind $\vec{a}$ und $\vec{d}$ wegen
$0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 0$
sowie
$\vec{b}$ und $\vec{d}$ wegen
$(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 0$.

bb

Die Geraden g und k sind identisch für

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

bg

P und R liegen auf der xy-Ebene,
da für beide Punkte die z-Koordinate 0 ist.
Also liegt die Gerade PR in der xy-Ebene.

Q liegt nicht auf dieser Ebene, da $z = 2 \neq 0$.
Also kann Q nicht auf der Geraden PR liegen.

bf

Der Parameter t = 2 führt zu P.

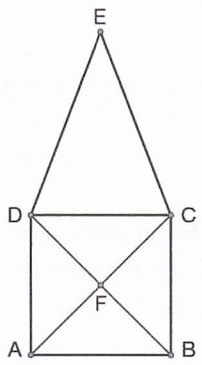
Der Parameter t = 1 führt zu Q.

Der Parameter t = –1 führt zu R.

be

Gleiche Vektoren:
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FB}$.

Vielfache voneinander:
$\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{FC}$,
$\overrightarrow{DB}$ und $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{DB}$ und $\overrightarrow{DF}$.



© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

cd

Die Ebene E hat die Richtungsvektoren:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ ist Normalenvektor von E, denn es gelten:

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2a + 2a + 0 = 0$

und

(2) $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = -2a + 0 + 2a = 0$.

cj

Für r = 2 enthält die Gerade g den Punkt P. Außerdem liegt g in der yz-Ebene, da die x-Koordinate aller Punkte 0 ist.

Für s = 1 enthält die Gerade h den Punkt P. Aber h liegt nicht in der yz-Ebene, da die x-Koordinate für alle $s \neq 1$ nicht 0 beträgt.

ca

Die Aussage ist wahr.

Der Spurpunkt liegt auf der yz-Ebene.

bi

Für t = 1 erhält man P = (3 | –1 | 4);
für t = 3 erhält man Q = (7 | –3 | 6).

Die Länge der Strecke beträgt:

$d(P, Q) = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$.

ce

Die Seitenfläche BCS liegt auf der Ebene

E_1: $3y + z = 6$.

Begründung:

$B \in E_1$, da $3 \cdot 2 + 0 = 6$;

$C \in E_1$, da $3 \cdot 2 + 0 = 6$;

$S \in E_1$, da $3 \cdot 0 + 6 = 6$.

cc

Nur die Ebene E_2 enthält den Punkt P = (3 | 2 | 5), und zwar für r = s = 1.

cb

Jeder Punkt von g hat die x-Koordinate 1; jeder Punkt von h hat die x-Koordinate 2. Also haben g und h keinen Schnittpunkt.

Die Geraden g und h sind nicht parallel, weil deren Richtungsvektoren keine Vielfache voneinander, also linear unabhängig, sind.

bh

Die Gerade g durch A, D liegt in der xy-Ebene; alle Punkte von g haben die y-Koordinate –2.

Der einzige Punkt von der Geraden h durch B, S auf der xy-Ebene ist B = (2 | 2 | 0).

g und h haben keinen Punkt gemeinsam und sind offensichtlich nicht parallel. Also sind sie windschief.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

cf

Die Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig, wenn der Richtungsvektor von h wie folgt lautet: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für r = 1 ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor von h ein Punkt von g.

dj

Wegen $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$
muss gelten: $d = 0$.

Die Koeffizienten a, b und c können beliebig gewählt werden.

da

(I) – (C)

(II) – (A)

(III) – (B)

ch

$P \in g \ (r = 1)$

$Q \in g \ (r = 2)$; $Q \in h \ (s = 2)$

$R \in h \ (s = -1)$

ci

Auf der Ebene E: $3x + z = 6$ liegen die folgenden Pyramideneckpunkte:

A (denn $3 \cdot 2 + 0 = 6$),

B (denn $3 \cdot 2 + 0 = 6$)

und

S (denn $3 \cdot 0 + 6 = 6$).

cg

Die Gerade h ist nicht orthogonal zur Ebene E.

Es gilt zwar $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$,

aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

dc

P liegt auf h für $t = 2$;

Q liegt auf h für $t = 1$.

db

Die Aussage ist falsch.

Auch jede Gerade durch den Ursprung hat genau einen Spurpunkt.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

dg

Die Aussage (I) ist falsch.
Die Ebenen können auch parallel sein.

Die Aussage (II) ist falsch.
Die beiden Normalenvektoren müssen linear abhängig sein.

dh

$d(P, E) = 0$ gilt nur, wenn P in E liegt.

Dies ist aber nicht der Fall, denn
$3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \neq 0$.

di

(a) $d(g, E) \neq 0$: g und E sind parallel.

(b) $d(E, F) = 0$: E und F schneiden sich oder E und F sind identisch.

(c) $d(E, F) \neq 0$: E und F sind parallel.

de

Die Gerade h muss folgende Darstellung haben, damit sie orthogonal zu g ist:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 6 \end{pmatrix},$$

denn es gilt:
$0 \cdot 0 + 1 \cdot (-24) + 4 \cdot 6 = 0$.

dd

Die Spurpunkte lauten:

$S_{23} = (0|1|2)$ (für $r = 1$),

$S_{13} = (4|0|1)$ (für $r = 2$) und

$S_{12} = (8|-1|0)$ (für $r = 3$).

ej

(a) $d(g, h) = 0$: g und h schneiden sich oder g und h sind identisch.

(b) $d(g, h) \neq 0$: g und h sind parallel oder g und h sind windschief.

(c) $d(g, E) = 0$: g und E schneiden sich oder g liegt in E.

ea

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ gilt für den Ergänzungswinkel α:

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{44}} \approx 0{,}572 \Rightarrow \alpha \approx 55{,}10°.$$

Also gilt:
$\varphi = 90° - \alpha \approx 34{,}90°$.

df

(1) $d(h, g) = d(h, E)$ kann gelten, wenn die Ebene F durch g und h orthogonal ist zu E.

(2) $d(h, g) < d(h, E)$ kann nicht gelten.

(3) $d(h, g) > d(h, E)$ kann gelten, wenn die Ebene F durch g und h nicht orthogonal ist zu E.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

ec

Für B = (2|2|0), D = (–2|–2|0), S = (0|0|6) gilt:

$\vec{u} = \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 16$; $|\vec{u}| = \sqrt{44}$; $|\vec{v}| = \sqrt{32}$.

Also gilt:

$\cos(\varphi) = \frac{16}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{32}} \approx 0{,}43 \Rightarrow \varphi \approx 64{,}76°$.

ee

Es gehören zusammen:

(I) – (2) – (A)

(II) – (3) – (C)

(III) – (1) – (B)

eh

$a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0°$

$a = 1 \Leftrightarrow \alpha = 30°$

$a = 3 \Leftrightarrow \alpha \approx 42{,}13°$

ed

Angenommen, die beiden Geraden sind windschief.
Es wird dann der Abstand zwischen diesen beiden windschiefen Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$

und

h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$

bestimmt.

ei

Die überdeckte Fläche ist eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 1.

Die Ebene, in der die Kreisfläche liegt, ist orthogonal zu $\overrightarrow{OA}$.

eb

a) Es gilt:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\cos(\alpha) = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}43°$.

b) Wegen $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ gilt $\beta = 90°$.

Begründung: ABCD ist kein ebenes Viereck.

ef

Es gilt: $\measuredangle(g, h) = 90°$.

Wegen $0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$ sind die Geraden g und h zueinander orthogonal.

(I) $\measuredangle(E, g) = 45°$ und (II) $\measuredangle(E, h) = 30°$

Begründung: Mit dem Normalenvektor von E gilt für den Ergänzungswinkel dann

in (I): $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Rightarrow \alpha = 45°$; also $\varphi = 45°$;

in (II): $\cos(\alpha) = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$; also $\varphi = 30°$.

eg

$\cos\left(\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{3}{5 \cdot 3} \Rightarrow \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \approx 78{,}46°$

$\cos\left(\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{c}\right)\right) = \frac{56}{5 \cdot 13} \Rightarrow \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{c}\right) \approx 30{,}51°$

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

fc

Mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und der Gleichung

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt:

$a = 2;\ b = -1;\ c = -1;\ d = 1.$

Also gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

fg

a) Das Kommutativgesetz für die Matrizenmultiplikation gilt im Allgemeinen nicht.

b) Das Assoziativgesetz für die Matrizenaddition gilt.

c) Die Multiplikation einer quadratischen Matrix mit der entsprechenden Einheitsmatrix ergibt immer die Matrix selbst.

fe

$M^T = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T$

fj

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Die Matrix A ergibt sich durch Vertauschung von 2. und 3. Spalte der Matrix M_1.

Die Matrix B ergibt sich durch Vertauschung von 2. und 3. Zeile der Matrix M_1.

ff

(1) Falsch, da z. B. für $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse existiert.

(2) Falsch, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix ist.

(3) Wahr. Es gilt sogar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

fd

Addieren lassen sich:
$A + D;\ D + A.$

Multiplizieren lassen sich:
$A \cdot C;\ A \cdot D;\ B \cdot E;\ C \cdot B;$
$D \cdot A;\ D \cdot C;\ E \cdot B$

fa

Erkenntnis:
Die Einträge von C sind jeweils die Summe der zugehörigen Zeile der (3 × 3)-Matrix.

$C = \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 240 \end{pmatrix}$

Erkenntnis:
Die Einträge von D sind jeweils die Summe der zugehörigen Spalte der (3 × 3)-Matrix.

$D = (120 \quad 150 \quad 180)$

fb

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

An den Rechnungen erkennt man, dass z. B.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2^3$, also $M^4 = M \cdot 2^3$.

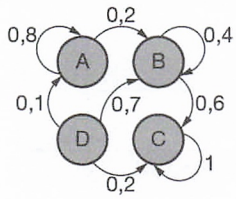
Allgemein gilt: $M^n = M \cdot 2^{n-1}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

fi

a) Übergangsgraph:



$$\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Da alle Zustände mit C verbunden sind und aus C nichts mehr herauskommt, strebt das System gegen die Grenzverteilung $\vec{v}_G$.

gd

$$U_G = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}75 \end{pmatrix};\ \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$$

ge

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}45 \\ 0{,}7 & 0{,}55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$

gc

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 468 \\ 312 \\ 360 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 470{,}4 \\ 232{,}8 \\ 436{,}8 \end{pmatrix};\ \vec{v}_{10} = \begin{pmatrix} 488{,}3 \\ 217{,}0 \\ 434{,}6 \end{pmatrix}$$

gj

Der Prozess hat einen Zyklus der Länge 4.

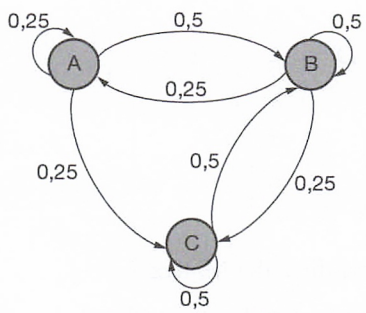
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Er ist gedämpft, also nicht periodisch.
Nach drei Zyklen sind noch
$0{,}8^3 = 0{,}512 = 51{,}2\,\%$ vorhanden.

gb

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}76 \end{pmatrix}$$

ga



fh

a) $U = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $U \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix};\ U^2 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 148 \\ 76 \\ 76 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1

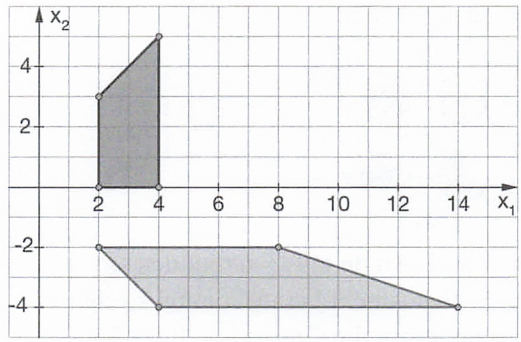
© 2014 Schroedel, Braunschweig

ha

Einsetzen von $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung und auflösen nach t liefert die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

gf

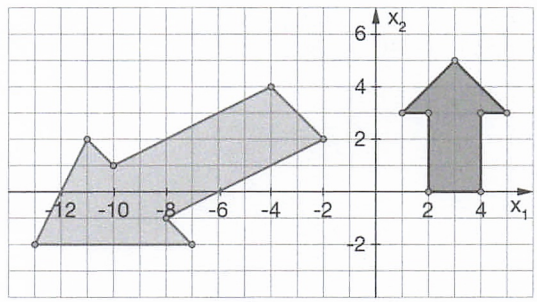


hj

M beschreibt eine Drehung um die z-Achse um 45° mit einer Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$.

N beschreibt eine Spiegelung an der durch die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ festgelegten Ebene durch den Nullpunkt ($x - z = 0$).

gg



hc

Die Einheitsmatrix und drei Drehungen:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Vier Spiegelungen:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

gi

Die Bilder der Einheitsvektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

liefern die Spalten der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

gh

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$:

Das LGS $\left|\begin{array}{r} 3a = -6 \\ 3c = 3 \\ 2a + 5b = -9 \\ 2c + 5d = -3 \end{array}\right|$ hat die Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

hb

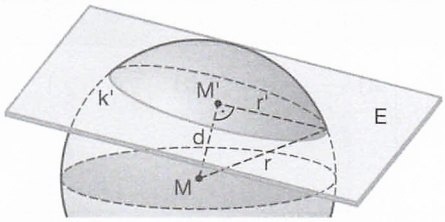
a) $S_{x_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; $S_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$S_{x_1} \cdot D \cdot S_{x_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

b) $S_{x_2} \cdot D \cdot S_{x_1}$ liefert dieselbe Matrix.
(Dies ist aber nicht verallgemeinerbar.)

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

ij



Der Schnittkreis ist ein Kreis um den Mittelpunkt M′ mit Radius r′.

1. Hilfsgerade h: $\vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}_E$ aufstellen, wobei $\vec{n}_E$ ein Normalenvektor von E ist. M′ ist dann der Schnittpunkt von E und h.
2. $d = \left|\overrightarrow{MM'}\right|$ bestimmen; $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$.

hi

Die Gleichung beschreibt
eine Tangente an einen Kreis mit Mittelpunkt M
oder
eine Tangentialebene an eine Kugel mit Mittelpunkt M
im Berührpunkt B.

ia

Es gibt drei Fälle:

1. Die beiden Kugeln haben einen Schnittkreis.
2. Die beiden Kugeln berühren sich in einem Berührpunkt.
3. Die beiden Kugeln haben keine gemeinsamen Punkte.
   Spezialfall: Eine Kugel liegt in der anderen.

hf

Es gilt: $\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Der Punkt P liegt innerhalb der Kugel, weil
$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{14} < 5$
gilt.

hd

(I) und (III) beschreiben den geforderten Kreis.

Der Kreis in (II) hat zwar denselben Mittelpunkt M = (–3 | 1), aber den Radius $r = \sqrt{5}$.

hh

Allgemein gilt:
T: $\left(\vec{b} - \vec{m}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{m}\right) = r^2$

Mit den gegebenen Größen gilt dann:
T: $6x_1 + 8x_3 = 100$

he

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)^2 = 6^2$$

oder

$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 3)^2 = 36$

hg

1. h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufstellen, wobei $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E ist.
2. Schnittpunkt P von E und h bestimmen:
   $t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$
   $\Rightarrow P = (-1 \,|\, -1 \,|\, -2)$
3. Abstand von M zu P ermitteln: $\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{14}$
   Da $\sqrt{14} > 3$, gibt es keine Schnittpunkte.

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

1	Lösung
1	$2 < \sqrt{5} < 3$
2	Eine Litfaßsäule ist ein Zylinder, also $V = G \cdot h$. $G \approx 1\,m^2$, $h \approx 3\,m \Rightarrow V \approx 3\,m^3$.
3	Nein, eine Funktion ist immer eine eindeutige Zuordnung: Jedem x-Wert wird immer nur ein y-Wert zugeordnet.
4	$3x \cdot (6y - 3 + 8x)$
5	$0 \le p \le 1$

2	Lösung
1	a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{16}$
2	$A = a^2$. Der Flächeninhalt vervierfacht sich also.
3	An den Stellen $x = -1$ bzw. $x = 1$.
4	$x_1 = -2$ und $x_2 = \sqrt{5}$
5	$P(ZZK) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$

3	Lösung
1	a) 16 b) 0
2	z. B. ein Rechteck mit den Seitenlängen 2a und b.
3	z. B. $g(x) = 0{,}5x + 1$, $p(x) = x^2 - 2$
4	$a^6 - 2a^3b^4 + b^8$
5	$P(2) \approx \frac{21}{120}$

4	Lösung
1	a) Falsch: $\sqrt{9} = 3$ ist keine irrationale Zahl. b) Falsch: $\frac{6}{3} = 2$ ist eine ganze Zahl.
2	$V = \frac{1}{3} \cdot 100\,cm^2 \cdot 3\,cm = 100\,cm^3$
3	g ist eine quadratische Funktion.
4	$3x^2 + x^3$
5	Natürlich immer noch $\frac{1}{6}$, der Würfel hat sich ja nicht verändert.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

5	Lösung
1	$\sqrt{10} < 3{,}45 < 3{,}47 < 4 < \sqrt{17}$
2	Pythagoras liefert mit den Katheten $a = 3\,\text{LE}$ und $b = 5\,\text{LE}$ für den Abstand: $c = \sqrt{34}\,\text{LE}$
3	$h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
4	$-24a^6$
5	75 % von 16 sind $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$. Also müssen noch 8 Kugeln schwarz gefärbt werden.

6	Lösung
1	a) $\frac{a-b}{2}$ b) $\frac{a}{c}$
2	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, also z. B. $a = 1\,\text{m}$ und $h = 3\,\text{m}$.
3	$m = 2$, also gilt: $y = 2x + b$. P einsetzen liefert: $b = -1$. Also gilt: $y = 2x - 1$.
4	$x_1 = -1$, $x_2 = 0$
5	Durch 7 teilbar sind 7, 14, 21, 28, 35, 42 und 49, also gilt $p = \frac{7}{49}$.

7	Lösung
1	$-\frac{7}{9}$
2	Es gilt: $\delta = \beta = 180° - 70° = 110°$, $\gamma = 70°$, $\varepsilon = \alpha = 70°$.
3	a) Anzahl an Baggern → Arbeitsdauer b) Gesprächsdauer → Kosten (ohne Grundgebühr)
4	a) $x_1 = 9$, $x_2 = -9$ b) Das LGS ist nicht lösbar.
5	(1) rot = 3, blau = 6 (2) rot = 9, blau = 18

8	Lösung
1	a) $\sqrt{5}$ b) 1
2	20 % von 360° sind $0{,}2 \cdot 360° = 72°$.
3	Ja, z. B. $f(x) = 4$.
4	$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ $\Rightarrow x = -1$
5	Gesamtstimmen: 17 Absolute Mehrheit ab 9 Stimmen. $\Rightarrow$ Keiner hat gewonnen!

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

9	Lösung
1	a) $\sqrt{9} > \frac{5}{2}$ b) $\sqrt{5} < \sqrt{2 \cdot 3}$
2	z. B. 10 cm, 10 cm und 6 cm.
3	Nein, eine proportionale Zuordnung ist eine spezielle lineare Zuordnung der Form: $y = mx + 0$, also $b = 0$.
4	$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
5	Datenreihe der Größe nach ordnen (Rangliste), der Wert in der Mitte ist der Zentralwert. (Bei zwei Werten in der Mitte ist der Zentralwert der Mittelwert dieser beiden Zahlen.)

10	Lösung
1	$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
2	Es gilt $A = \pi r^2$, also verneunfacht sich der Flächeninhalt.
3	Der Scheitelpunkt liegt genau zwischen den beiden Nullstellen $x = 1$ bzw. $x = -1$, also bei $x = 0$. $\Rightarrow S = (0 \mid -2)$
4	1
5	$P(KK) = \frac{1}{4}$ $P(5 \text{ oder } 6) = \frac{2}{6} > \frac{1}{4}$

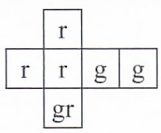
11	Lösung
1	a) 0,49 b) $\frac{1}{27}$
2	$A_{neu} = k^2 \cdot A_{alt} = 0{,}04 \cdot 10\,cm^2$ $= 0{,}4\,cm^2$
3	$k(x) = 2{,}5(x - 2)^2 + 1$
4	$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
5	Für jeden einzelnen Wurf gilt: $P(K) = 0{,}5$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit 50 %.

12	Lösung
1	a) $13^2 = 169$ b) -2
2	$\frac{3}{4} = 75\,\%$
3	$h(x) = x^3$

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–8	–1	0	1	8	27	64

4	a) $\mathbb{L} = \{5\}$ b) $\mathbb{L} = \{-3\}$
5	Kleiner 4: $\{11; 21; 12\}$, also gilt $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

13	Lösung
1	$(-1)\cdot(-2):(-1)=-2$
2	Es gilt $\varepsilon=\frac{360°}{5}=72°$. Die Innenwinkelsumme beträgt 540°, also gilt $\varphi=\frac{108°}{2}=54°$.
3	$x^2+1=x+1$
4	Nein, denn Einsetzen liefert: $-3=\frac{1}{2}(-1)^2-1 \Leftrightarrow -3=-\frac{1}{2}$.
5	z. B.: 

14	Lösung
1	$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\sqrt{9}=3$
2	Es gilt $\gamma=360°-300°=60$, also $\alpha=\beta=\frac{180°-60°}{2}=60°$. Es ist also sogar ein gleichseitiges Dreieck!
3	Für $x_1=0$, $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi$.
4	Das LGS hat keine Lösung.
5	$P(GG)=\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}=1\%$

15	Lösung
1	$\frac{37}{12}$
2	$\frac{1}{2}\cdot 8\,\text{cm}\cdot 5\,\text{cm}=20\,\text{cm}^2$
3	$x=\frac{\pi}{2}$
4	... man mit dem Kehrwert multipliziert. $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{4}{3}$
5	$P(\text{Junge}\mid\text{Haustier})=\frac{2}{11}$

16	Lösung
1	a) $\sqrt{4}<\frac{5}{2}$ b) $\sqrt{5}>\sqrt{2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$
2	Pythagoras liefert: $d(P,Q)=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
3	Auf den beiden Winkelhalbierenden: $f(x)=x$ und $g(x)=-x$.
4	a) $5=2x+1$ b) $0=(x-1)^2$
5	$37{,}5\%=\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$ $\Rightarrow$ 6 schwarze Kugeln $62{,}5\%=\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$ $\Rightarrow$ 10 grüne Kugeln

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

17	Lösung
1	$\frac{2}{9}$
2	Es kann z. B. ein Dreieck mit der Grundseite 3 und der Höhe a + b gezeichnet werden.
3	$y = 2 \cdot 2^x$
4	a) $\frac{x^5}{7}$ b) $-15n^6$
5	Man kann z. B. die Felder von 1 bis 20 nummerieren und dann festlegen: gerade $\triangleq$ Kopf ungerade $\triangleq$ Zahl

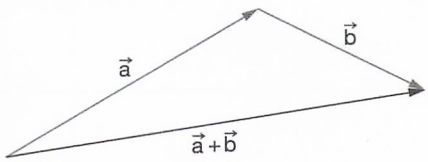
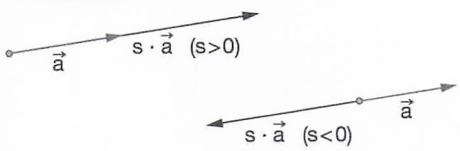
18	Lösung
1	(1) $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ (2) $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$
2	Geschätzte Maße: 15 m; 2,5 m; 3 m Das Volumen beträgt dann 112,5 m^3.
3	z. B. $f(x) = (x + 3)^2$
4	Umformen liefert: $x^4 = -1$. $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$
5	$A = \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\}$ $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

19	Lösung
1	a) 16 b) 0,9
2	a) 600 dm^3 b) Es gilt 1 dm^3 = 1 ℓ, also sind 0,6 m^3 = 600 ℓ.
3	$x_1 = 3,\ x_2 = -3$
4	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = -7$
5	$10000 \cdot \frac{1}{20} = 500$

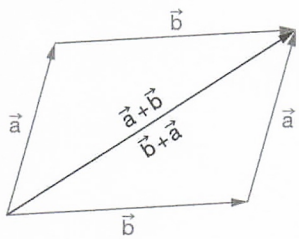
20	Lösung
1	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$
2	1 cm $\triangleq$ 10 000 cm = 100 m $\Rightarrow$ 5 cm $\triangleq$ 500 m
3	$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = -x^2 - 1$
4	$9x + 8 = x^2 - 7$
5	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0,46\%$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Orientieren und Bewegen im Raum – Übersicht (Seite 24)

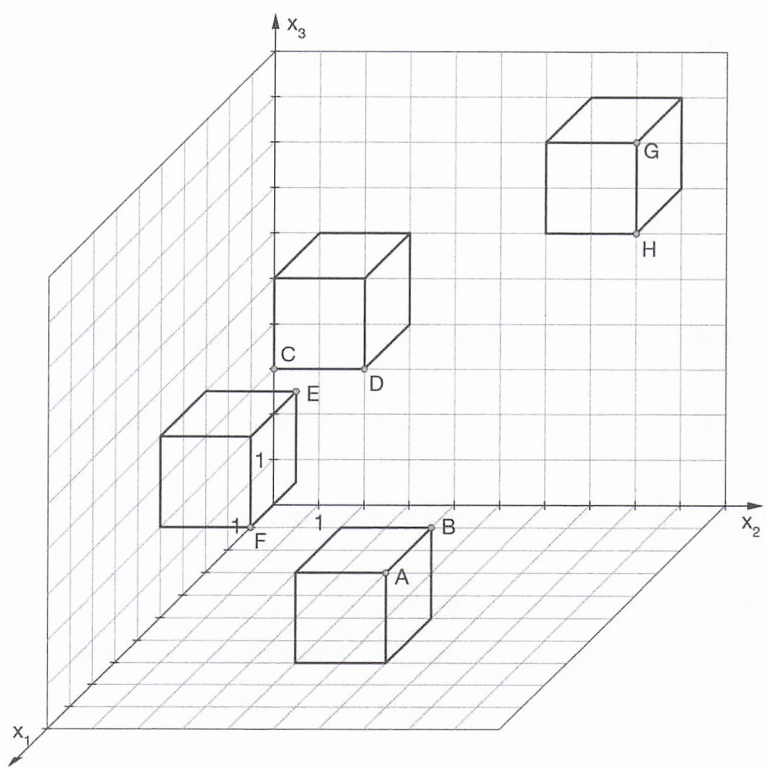
Linearkombination	Ein Vektor $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b}$ mit r, s $\in \mathbb{R}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Punktmenge	Es wird die xy-Ebene beschrieben.
Betrag eines Vektors	Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Dann ist der Betrag $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
Abstand zweier Punkte	$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Addition von Vektoren	Algebraisch: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ Geometrisch: 
Differenzvektor	Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ lässt sich in der Form $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ darstellen.
S-Multiplikation	Algebraisch: $s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$ Geometrisch: 
Gleiche Vektoren	Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben.
Vektor als Punkt	Zeichnet man vom Ursprung O des Koordinatensystems einen Pfeil zum Punkt P = $(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$, so repräsentiert dieser den Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Gleichzeitig kennzeichnet er auch den Punkt P.
Koordinatensystem	Die Achsen stehen zueinander orthogonal.
Streckenzug	Ein Streckenzug ist geschlossen, wenn der Streckenzug den Nullvektor ergibt.
Linear abhängig	Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\vec{a} = c\vec{b}$; $c \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.
Orthogonale Vektoren	Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Man bezeichnet die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auch als orthogonal.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vektor als Verschiebung	Geometrisch können Vektoren als Verschiebungen (Translationen) in der Ebene oder im Raum interpretiert werden. Beispiel: Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschiebt einen Punkt P um –2 in Richtung x_1-Achse, um 1 in Richtung x_2-Achse und um 3 in Richtung x_3-Achse.
Kommutativgesetz	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Algebraisch: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$ Geometrisch: 

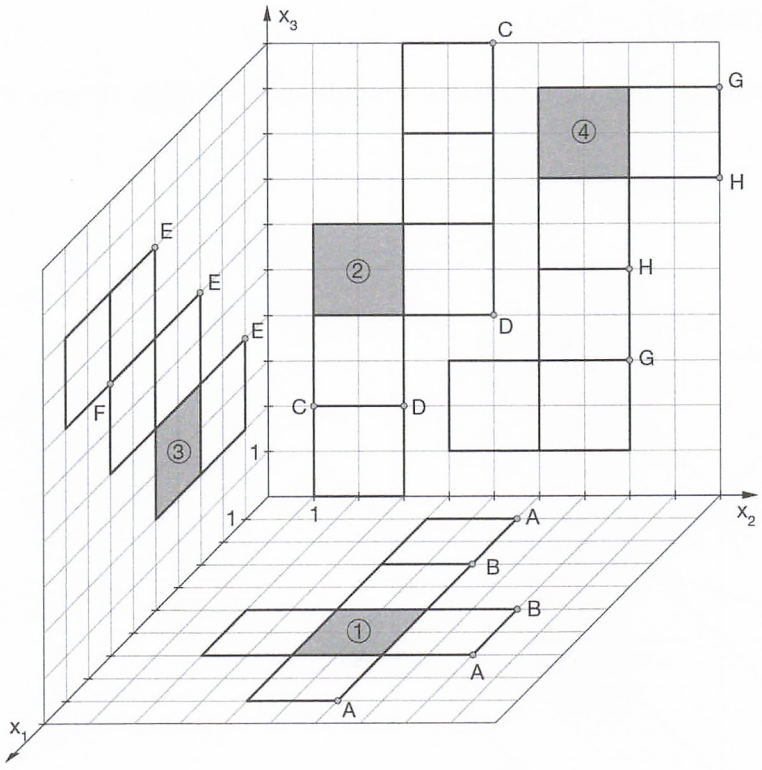
Würfel im Koordinatensystem 1 (Seite 25)

a) A = (7|6|2), B = (5|6|2), C = (2|1|4), D = (2|3|4), E = (3|2|4), F = (5|2|2), G = (2|8|9), H = (2|8|7)



ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b)



c) Schüleraktivität.

Würfel im Koordinatensystem 2 (Seite 26)

a) P = (8|2|0); Eckpunkte: (8|4|0), (6|4|0), (6|2|0), (8|2|2), (8|4|2), (6|4|2), (6|2|2)

b) Würfel 1 und Würfel 2: $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; Würfel 2 und Würfel 3: $\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Würfel 3 und Würfel 5: $\overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; Würfel 4 und Würfel 5: $\overrightarrow{OP_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_6} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) Die Ecke gehört zu Würfel 3 mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $|\vec{a}| = \sqrt{96} \approx 9{,}8$ LE.

d) $1 \rightarrow 4$: $\vec{v}_{14} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $2 \rightarrow 4$: $\vec{v}_{24} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $3 \rightarrow 4$: $\vec{v}_{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $5 \rightarrow 4$: $\vec{v}_{54} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

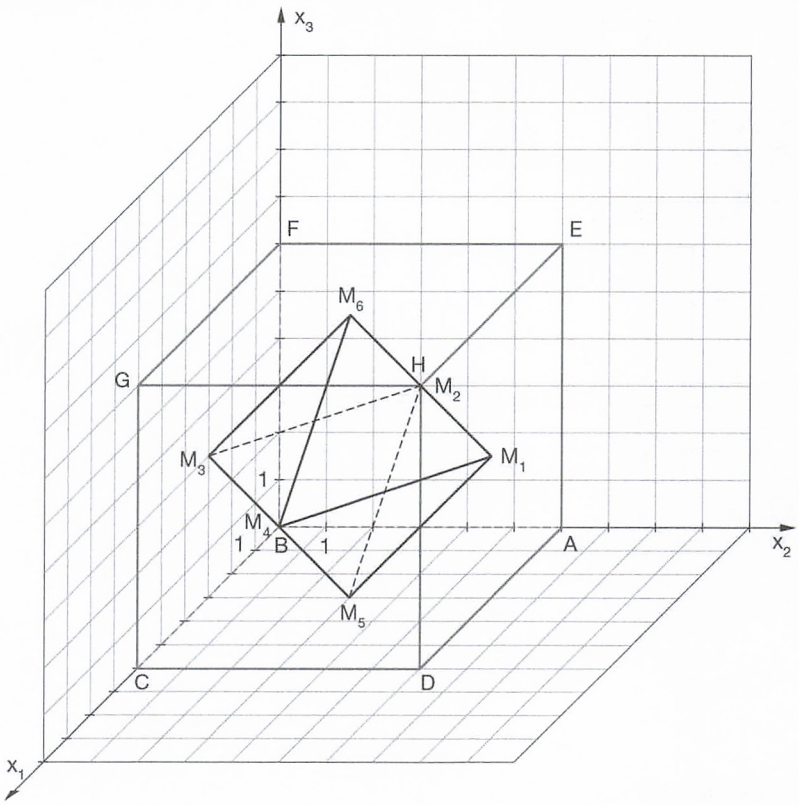
e) $|\vec{v}_{14}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $|\vec{v}_{24}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; $|\vec{v}_{34}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $|\vec{v}_{54}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfel im Koordinatensystem 3 (Seite 27)

a) A = (0|6|0), B = (0|0|0), C = (6|0|0), D = (6|6|0), E = (0|6|6), F = (0|0|6), G = (6|0|6), H = (6|6|6)



b) $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

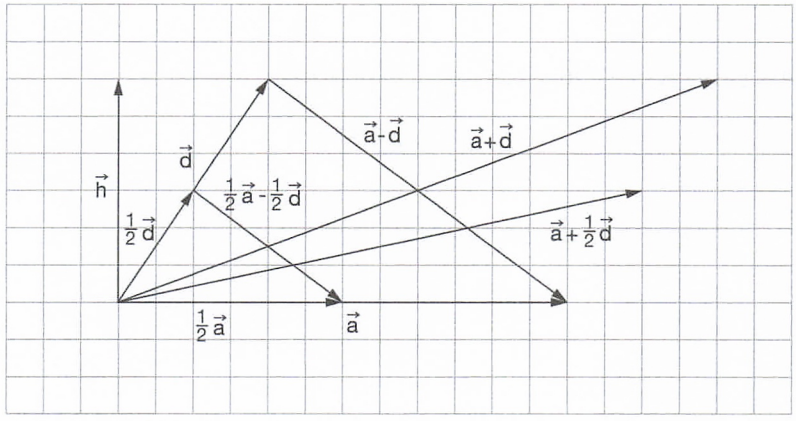
c) Koordinaten der Seitenmitten:
$M_1 = (3|6|3)$, $M_2 = (0|3|3)$, $M_3 = (3|0|3)$, $M_4 = (6|3|3)$, $M_5 = (3|3|0)$, $M_6 = (3|3|6)$

d) Siehe Skizze in Lösung von Teilaufgabe a).

e) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

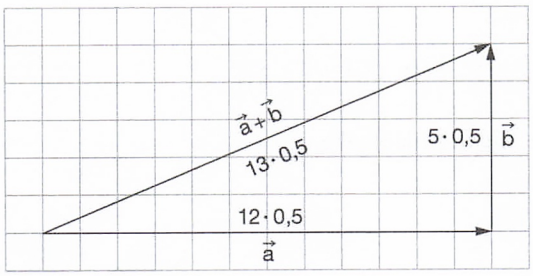
Streckenzüge 1 (Seite 28)

1



Es gilt $\vec{h} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{d}$, also $r = -\frac{1}{3}$ und $s = 1$.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

2 

Durch Abzählen von Kästchen erhält man:

$|\vec{a}| = 6\text{ cm} = 12 \cdot 0{,}5\text{ cm}$; $|\vec{b}| = 2{,}5\text{ cm} = 5 \cdot 0{,}5\text{ cm}$.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck, in dem $\vec{a}+\vec{b}$ die Hypotenuse ist.

Satz des Pythagoras: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2$

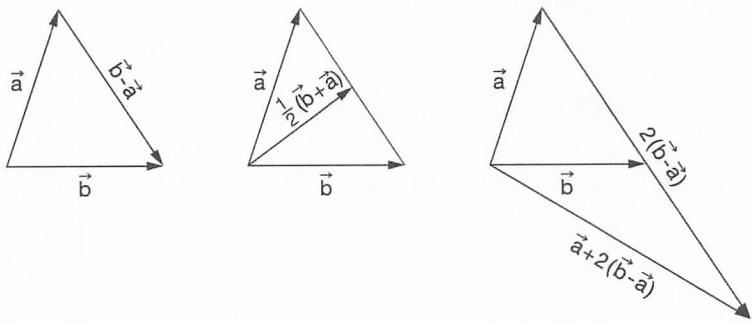
$(12 \cdot 0{,}5\text{ cm})^2 + (5 \cdot 0{,}5\text{ cm})^2 = 144 \cdot (0{,}5\text{ cm})^2 + 25 \cdot (0{,}5\text{ cm})^2 = 169 \cdot (0{,}5\text{ cm})^2$

$\sqrt{169 \cdot (0{,}5\text{ cm})^2} = 13 \cdot 0{,}5\text{ cm} = 6{,}5\text{ cm}$

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = 6{,}5\text{ cm} = 13 \cdot 0{,}5\text{ cm}$

3 Der Differenzvektor der Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ist $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Betrag des Differenzvektors ist $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9$.

4 

5 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{BO} = -\vec{b}$

Streckenzüge 2 (Seite 29)

1 a) $\vec{d} - \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, die Pfeilspitze liegt in D.

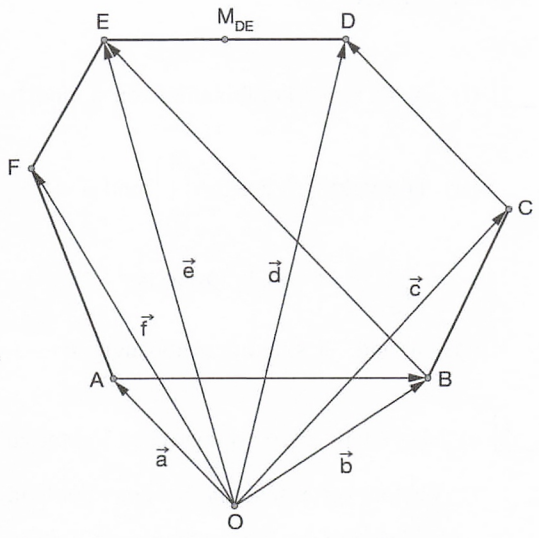
b) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

c) $\frac{1}{2}(\vec{e}+\vec{d}) = \overrightarrow{OM_{DE}}$ zeigt von O zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$.

d) $\overrightarrow{BE} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{OM_{DE}} = \frac{1}{2}(\vec{e}+\vec{d})$, $\overrightarrow{OM_{BC}} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$,

$\overrightarrow{M_{BC}M_{DE}} = \overrightarrow{OM_{DE}} - \overrightarrow{OM_{BC}} = \frac{1}{2}(\vec{e}+\vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1 Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

f) $\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{e} - \vec{b}\right) + \left(\vec{d} - \vec{c}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{e} + \vec{d} - \vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{e} + \vec{d}\right) - \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right)$

$\overrightarrow{M_{BC}M_{DE}} = \overrightarrow{OM_{DE}} - \overrightarrow{OM_{BC}} = \frac{1}{2}\left(\vec{e} + \vec{d}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, siehe Teilaufgabe e)

Die Rechnung bestätigt: $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{M_{BC}M_{DE}}$.

g) Da $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ gilt, ist das Viereck BCDE ein Trapez.

h) $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{f}\right)$. Dabei ist $\overrightarrow{OS}$ der Vektor von O zum Schwerpunkt des Dreiecks ABF; die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{f}$ zeigen jeweils von O zum gleichnamigen Eckpunkt des Dreiecks.

2 a) $\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{h} + \vec{c} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG}$; $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OJ}$

b) Linearkombinationen aus $\vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{h}$ mit Anfangspunkt O und den Zielpunkten F, K, L, M, E und S sind: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{h}$

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{h}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{h}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{h}$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HS} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{h}$

c) $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{h}$

Descartes Lexikon (Seite 30)

1–D; 2–F; 3–A; 4–G; 5–E; 6–C; 7–I; 8–H; 9–B

Vektoren (Seite 31)

1 (I) $\vec{v}$ ist Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(II) Die Vektoren $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht linear abhängig, da das Gleichungssystem $r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht lösbar ist.

(III) $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ sind linear abhängig, da $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$. Dies gilt sogar allgemein für jeden beliebigen Vektor.

2 a) Man erhält einen orthogonalen Vektor zu $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, indem man die beiden Koordinaten des gegebenen Vektors vertauscht und bei einer der beiden Koordinaten das Vorzeichen ändert. Damit ergibt sich beispielsweise der dazu orthogonale Vektor $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$. Es gilt z. B.: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

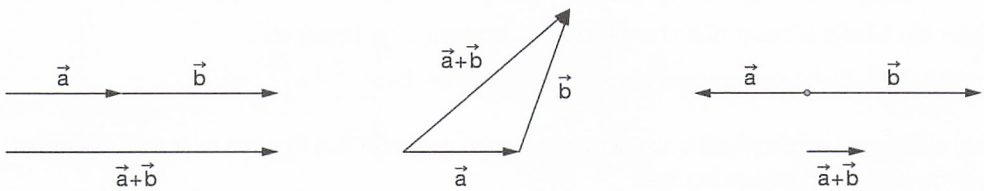
b) Im Raum kann man wie in Teil a) verfahren und setzt die dritte Koordinate 0.

Zu $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist z. B. $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal.

3 Alle Vektoren haben den Betrag (die Länge) 25.

$\sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$ und $\sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$.

4 $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$. Bei linear abhängigen (kollinearen), gleich orientierten Vektoren gilt das Gleichheitszeichen. Bei kollinearen, aber entgegengesetzt orientierten Vektoren und bei nicht kollinearen Vektoren ist die Summe der Beträge größer als der Betrag der Summe. Dieser Sachverhalt heißt Dreiecksungleichung.



$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}+\vec{b}|$ $\quad$ $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$ $\quad$ $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$

5 Der Betrag eines Vektors ergibt eine reelle Zahl.

6 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergeben sechs verschiedene Möglichkeiten.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ usw. ergeben $3 \cdot 2^3 = 24$ Möglichkeiten, da es für die Platzierung der 1 drei Möglichkeiten gibt und jede Koordinate ein Minuszeichen oder ein Pluszeichen haben kann, also $2 \cdot 2 \cdot 2$ Möglichkeiten. Beschränkt man sich auf ganzzahlige Koordinaten, gibt es also $6 + 24 = 30$ Vektoren mit dem Betrag 3.

7 a) Im dreidimensionalen Raum benötigt man drei nicht kollineare (linear unabhängige) Vektoren, d. h. die Vektoren sind nicht paarweise parallel zueinander.

b) $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{BF} = \vec{w}$; $\overrightarrow{HB} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{EB} = \vec{u} - \vec{w}$; $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

c) P ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.

Multiple Choice (Seite 32)

a) (A), (D), (E), (F) $\quad$ b) (B) $\quad$ c) (A) $\left(|\vec{a}| = \sqrt{11}\right)$

d) (A), (B), (D) $\quad$ e) (C) $\quad$ f) (B), (C), (D)

Schach mal anders (Seite 33)

2D-Schach

a) Kartesisches Koordinatensystem mit x- und y-Achse. Der Nullpunkt befindet sich im Feld a1.

Bauer: e2–e4 als Anfangszug $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beim Schlagen für weißen Bauer; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beim Schlagen für schwarzen Bauer

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) **Springer:** Es gibt acht Zugmöglichkeiten: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Läufer: $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis 4 (ohne a = 0); $\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis 3 (ohne a = 0)

Turm: $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis 4 (ohne a = 0)

Dame: Kombination der Bewegungen von Turm und Läufer:
$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis 4 (ohne a = 0); $\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis 3 (ohne a = 0)

König: Es gibt acht Zugmöglichkeiten: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

c) Springer d4–f5–g7: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Eine Dame oder ein Läufer können sich von d4 nach g7 in einem Zug bewegen.
Die „Springerzüge“ d4–f3–h4 entsprechen einem „Turmzug“ d4–h4: $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

d) Alle Züge sind abhängig von den Positionen der eigenen und gegnerischen Figuren oder dem Brettrand, die die Bewegungsfreiheit einschränken können.

3D-Schach

a) Kartesisches Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achse. Der Nullpunkt befindet sich beispielsweise unten vorne (Bild in der Aufgabenstellung).

Positionen der weißen Figuren:
Dame: (3|0|6); König: (4|0|6); Läufer: (2|0|5) und (5|0|5); Springer: (1|0|4) und (6|0|4);
Türme: (0|0|3) und (7|0|3); Bauern: (0|1|2), (1|1|3), (2|1|4), (3|1|5), (4|1|5), (5|1|4), (6|1|3) und (7|1|2)

b) Für die Anfangszüge gilt:

Bauer: $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Turm: $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$

Allgemein: $\begin{pmatrix}0\\a\\-a\end{pmatrix}$ für a = 1 bis 3; $\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\a\\a-7\end{pmatrix}$ für a = 5 bis 7

$\begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}$ für a = 1 bis 3; $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a\\0\\7-a\end{pmatrix}$ für a = 5 bis 7

Springer: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

Läufer: $\begin{pmatrix}a\\-a\\2a\end{pmatrix}$ für a = –2 bis –1; $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$

Dame: $\begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis –1; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a\\0\\-a+1\end{pmatrix}$ für a = 2 bis 4; $\begin{pmatrix}a\\-a\\2a\end{pmatrix}$ für a = –3 bis –1; $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$

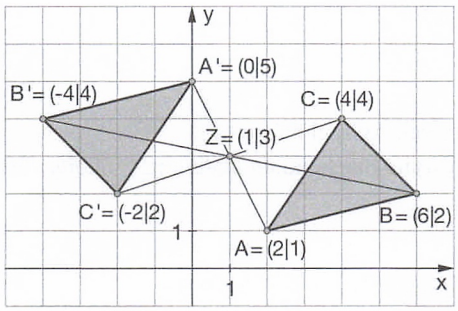
König: $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Wie leicht zu sehen ist, sind die meisten Züge abhängig von der aktuellen Position der Figur, was an der dreidimensionalen Form des „Schachbretts“ liegt. Außerdem sind alle Züge abhängig vom Brettrand. Im Spiel wird die Bewegungsfreiheit noch durch die eigenen und fremden Figuren eingeschränkt.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Punktspiegelung und zentrische Streckung (Seite 34)

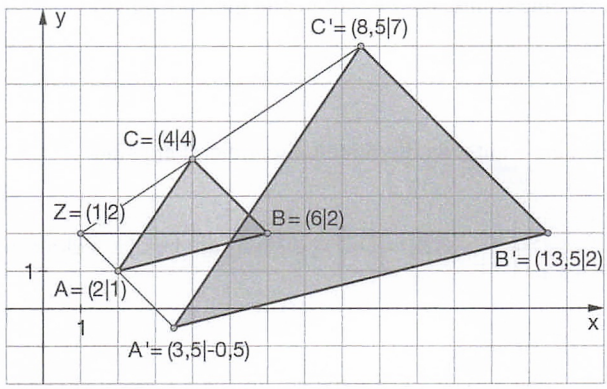
1 a) / b)



Beispiel zur Berechnung der Bildpunkte:
$\overrightarrow{a'} = 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

c) Der Trick besteht darin, den Ortsvektor für einen Punkt P und für den zugehörigen Bildpunkt P′ mithilfe des Ortsvektors für das Spiegelzentrum Z darzustellen:
Wegen $\overrightarrow{ZP} = \vec{p} - \vec{z}$ erhält man den Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ durch den Vektorzug $\vec{p} = \vec{z} + (\vec{p} - \vec{z})$.
Somit erhält man $\overrightarrow{p'} = \overrightarrow{OP'}$ durch den Vektorzug $\overrightarrow{p'} = \vec{z} - (\vec{p} - \vec{z}) = \vec{z} - \vec{p} + \vec{z} = 2\vec{z} - \vec{p}$.
Die Gleichung (1) ist also erfüllt.

2 a)



Beispiel zur Berechnung der Bildpunkte:
$\overrightarrow{b'} = (1-2{,}5)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2{,}5\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13{,}5\\2\end{pmatrix}$

b) Analog zu Aufgabe 1c) wird der Ortsvektor für einen Bildpunkt P′ über den Ortsvektor des Streckzentrums Z dargestellt: $\overrightarrow{p'} = \vec{z} + r(\vec{p} - \vec{z}) = \vec{z} + r\vec{p} - r\vec{z} = (1-r)\vec{z} + r\vec{p}$.
Die Gleichung (2) ist also erfüllt.

c) Eine Punktspiegelung ist eine Streckung mit dem Streckfaktor r = –1. In Formel (2) eingesetzt ergibt sich damit $\overrightarrow{p'} = (1-(-1))\vec{z} + (-1)\vec{p} = 2\vec{z} - \vec{p}$, was Formel (1) entspricht.

Begründen mit Vektoren (Seite 35)

1 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$; die beiden Vektoren sind zueinander parallel.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$; die beiden Vektoren sind zueinander parallel.

Somit ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

b) Der Schnittpunkt S der Diagonalen ergibt sich aus dem Streckenzug:

$\vec{s} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$. Somit gilt S = (1|3|2).

Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1 Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

2 a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{CF}| = \sqrt{2}$;

$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{2}$

Da die drei Seiten alle gleich lang sind, ist das Dreieck ACF gleichseitig.
Geometrische Begründung: Die drei Seiten sind jeweils Flächendiagonalen im Einheitswürfel.

b) Der Umfang des Dreiecks beträgt $U = 3\sqrt{2}$.

3 Es gibt drei Möglichkeiten für den Punkt D.

(I) $\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Somit gilt D = (0|2|1). Das Viereck ist eine Raute, da die Seiten alle gleich lang sind.

(II) $\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Somit gilt D = (0|0|–1). Das Viereck ist eine Raute, da die Seiten alle gleich lang sind.

(III) $\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Somit gilt D = (2|0|1). Das Viereck ist eine Raute, da die Seiten alle gleich lang sind.

4 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{9} = 3$; die beiden Vektoren sind zueinander parallel und gleich lang.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\3\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9} = 3$; die beiden Vektoren sind zueinander parallel und gleich lang.
Somit ist das Viereck ABCD eine Raute.

Eine Raute ist ein Quadrat, wenn die Diagonalen gleich lang sind:
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{18}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}1\\3\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{18}$.

Da die Diagonalen gleich lang sind, ist das Viereck ABCD ein Quadrat.

b) Der Schnittpunkt S der Diagonalen ergibt sich aus dem Streckenzug:

$\vec{s} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\3{,}5\\-4\end{pmatrix}$. Somit gilt S = (0,5|3,5|–4).

5 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49} = 7$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{49} = 7$;

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} \approx 7{,}1$

Somit ist das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, und $\overrightarrow{BC}$ haben die Länge 8.

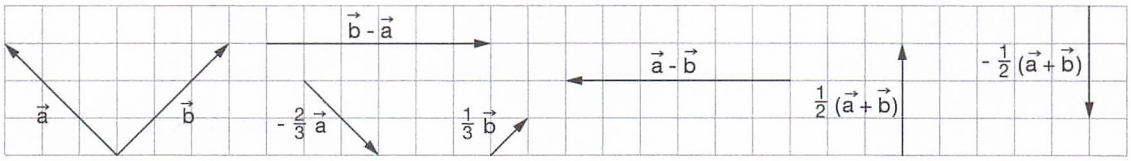
Die Diagonalen sind gleich lang: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{128}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{128}$.

Die Seiten sind gleich lang, gegenüberliegende Seiten sind parallel und die Diagonalen sind gleich lang.
Die Grundfläche ist somit ein Quadrat.
Die Grundfläche hat den Flächeninhalt $8 \cdot 8 = 64$ (in FE).

c) Die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze E führenden Kanten sind als Vektoren verschieden, haben aber alle den gleichen Betrag: $\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$.

Check up (Seite 36)

1



2 $\overrightarrow{OM_{OA}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{DM_{OA}} = \overrightarrow{OM_{OA}} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{d}$

$\overrightarrow{OM_{OD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{AM_{OD}} = \overrightarrow{OM_{OD}} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{d} - \vec{a}$

$\overrightarrow{OM_{AD}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$

3 a) Zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Betrag $\sqrt{2}$ sind $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Einheitsvektoren, also Vektoren mit der Länge 1.

b) Zum Beispiel: $\begin{pmatrix} -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5{,}3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4 a) $\sqrt{14^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{196 + 25 + 4} = \sqrt{225} = 15$; $\sqrt{12^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 36 + 16} = \sqrt{196} = 14$;
$\sqrt{11^2 + 10^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 100 + 4} = \sqrt{225} = 15$:

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind gleich lang; $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist mit 14 LE kürzer als die beiden anderen Vektoren, die den Betrag 15 LE haben.

b) Die Ortsvektoren der beiden Punkte sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Differenzvektor der beiden Ortsvektoren $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat den Betrag 15 (siehe Teilaufgabe 4 a)).

5 Der Verbindungsvektor von A nach B ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ein orthogonaler Vektor dazu ist z. B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

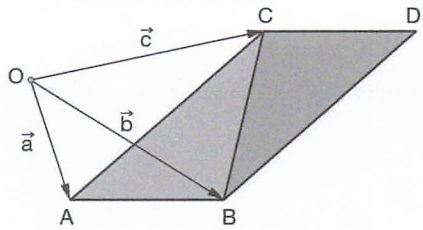
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 Der Ortsvektor zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Der Ortsvektor zum Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Das Dreieck ABC kann durch Anlegen des um 180° gedrehten Dreiecks an eine der ursprünglichen Dreiecksseiten zum Parallelogramm ergänzt werden:

Anlegen an die Seite $\overline{BC}$

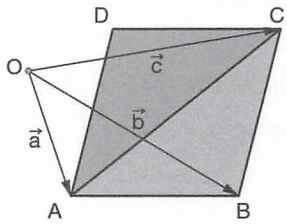


$\vec{d} = \vec{b} + (\vec{c} - \vec{a})$

$\vec{d} = \vec{c} + (\vec{b} - \vec{a})$

$\vec{d} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})$

an die Seite $\overline{AC}$

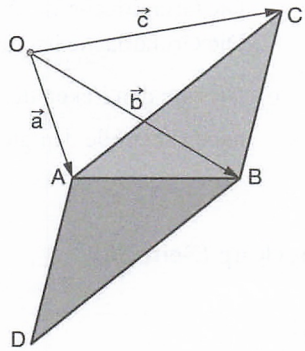


$\vec{d} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b})$

$\vec{d} = \vec{c} + (\vec{a} - \vec{b})$

$\vec{d} = \vec{b} + (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})$

an die Seite $\overline{AB}$



$\vec{d} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{c})$

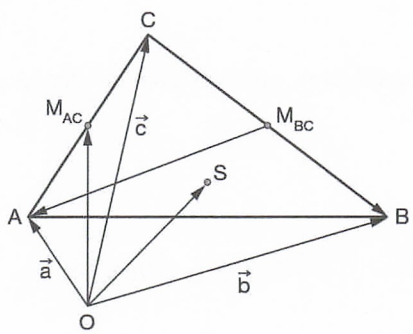
$\vec{d} = \vec{b} + (\vec{a} - \vec{c})$

$\vec{d} = \vec{c} + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{c})$

7 Drei zu $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ kollineare Vektoren sind z. B. $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ oder $\sqrt{10}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Der Betrag von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ist $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Die S-Multiplikation mit $\sqrt{10}$ vergrößert den Betrag auf $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$.

Kapiteltest (Seite 37, 38)

1



$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \overrightarrow{OM_{AC}}$, wobei M_{AC} der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ ist.

$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OS}$, wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

$\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_{BC}} = \overrightarrow{M_{BC}A}$ beschreibt die Seitenhalbierende vom Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ zum Eckpunkt A.

$\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$ beschreibt die Dreiecksseite $\overline{CB}$.

2 $\left|\vec{h}\right| = \left|\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

Wegen $15 \cdot 8 + 8 \cdot (-15) = 0$ ist die Orthogonalitätsbedingung erfüllt und deshalb gilt:
Der Vektor $\vec{s}$ ist orthogonal zum Vektor $\vec{h}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 a) Die Seiten des Vierecks lassen sich darstellen durch:

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, sind je zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks parallel, woraus folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Das Viereck ABCD ist also ein Parallelogramm.

b) Bei Parallelogrammen halbieren sich die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt, den Schwerpunkt. Man kann also entweder den Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ oder den von $\overline{BD}$ angeben, oder man bestimmt den arithmetischen Mittelwert der Ortsvektoren aller vier Eckpunkte:

$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 1{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 1{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix}$;

entsprechend $\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 1{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix}$.

Der Schwerpunkt des Parallelogramms ist somit S = (14|1,5|13,5).

c) Ein Parallelogramm ist eine Raute, wenn alle vier Seiten gleich lang sind oder die Diagonalen sich im rechten Winkel schneiden.

Es gelten $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$ und $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{12^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{169} = 13$; alle vier Seiten haben die Länge 13.

$\Rightarrow$ ABCD ist eine Raute.

d) Es sind vier Punkte E, F, G und H gesucht, sodass $\frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \vec{a}$, $\frac{1}{2}(\vec{f} + \vec{g}) = \vec{b}$, $\frac{1}{2}(\vec{g} + \vec{h}) = \vec{c}$ und $\frac{1}{2}(\vec{h} + \vec{a}) = \vec{d}$ gilt. Dafür sind viele Lösungen möglich, z. B. kann man die Koordinaten von E jeweils um 1 größer als die von A wählen und die von F jeweils um 1 kleiner als die von A, d. h. zu A = (2|–3|12) konstruiert man E = (3|–2|13) und F = (1|–4|11). Dann liegt G fest, denn aus F = (1|–4|11) und G = (27|6|19) muss sich B = (14|1|15) ergeben. Auch H liegt fest, denn aus G = (27|6|19) und H = (25|6|11) muss sich C = (26|6|15) ergeben und aus H = (25|6|11) und E = (3|–2|13) ergibt sich D = (14|2|12).

Das Seitenmittenviereck einer Raute ist ein besonderes Parallelogramm, ein Rechteck.

4 a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

b) Rechnerische Überprüfung: $\sqrt{20}^2 + \sqrt{8}^2 = 28 > 20 = \sqrt{20}^2$

Also ist $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 > |\overrightarrow{BC}|^2$ die richtige Aussage.

Das Dreieck ist nicht rechtwinklig, deshalb gilt die Gleichheit nicht. Da das Dreieck spitzwinklig ist, übertrifft die Summe der Quadrate der beiden kurzen Seiten das Quadrat der längsten Seite. In einem stumpfwinkligen Dreieck wäre es umgekehrt.

5 a) $\vec{b} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wenn $\vec{b} + \vec{d}$ ein Ortsvektor ist, dann ist sein Zielpunkt der Punkt C.

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt zwei Einheiten nach oben. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt zwei Einheiten nach rechts. $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt zwei Einheiten nach rechts und zwei Einheiten nach oben. $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt zwei Einheiten nach vorn und zwei Einheiten nach rechts. $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt zwei Einheiten nach hinten und zwei Einheiten nach rechts.

c) Kante $\overline{BC}$: $\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Kante $\overline{CD}$: $\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Diagonale $\overline{EG}$: $\frac{1}{2}\left(\vec{e}+\vec{g}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; Diagonale $\overline{BD}$: $\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6 (I) Die vier Punkte können alle auf einer Geraden liegen, die dann durch sie beschrieben wird.

(II) Liegen drei Punkte auf einer Geraden und der vierte nicht, beschreiben drei der vier Punkte ein ebenes Dreieck; der vierte Punkt liegt auf einer Dreiecksseite oder ihrer Verlängerung. Durch eine andere Auswahl von drei Punkten wird ein anderes Dreieck beschrieben; auch hier liegt der nicht als Eckpunkt gewählte vierte Punkt auf einer Dreiecksseite oder ihrer Verlängerung.

(III) Liegen drei Punkte in einer Ebene, aber nicht alle drei auf einer Geraden und liegt der vierte nicht in dieser Ebene, wird durch die vier Punkte eine Pyramide beschrieben. Sie hat vier Ecken, vier dreieckige Flächen und sechs Kanten.

(IV) Liegen alle vier Punkte in einer Ebene, aber immer nur zwei auf einer Geraden, dann wird durch die vier Punkte ein ebenes Viereck beschrieben. Es hat vier Ecken und vier Seiten (Kanten).

7 a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind die beiden anderen zur Spitze führenden Kantenvektoren.

b) $\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$; S = (5|5|0). Die Höhe der Pyramide beträgt 7 LE, vgl. E = (5|5|7).

c) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ haben den Betrag (die Länge) 8.
Die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze E führenden Kanten sind als Vektoren verschieden, aber sie haben alle den gleichen Betrag:
$\sqrt{4^2+4^2+7^2} = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$.
Die Grundfläche ist ein Quadrat. Die Seiten sind gleich lang, gegenüberliegende Seiten sind parallel; die Diagonalen sind gleich lang und werden im Punkt S halbiert.
Der Grundflächeninhalt beträgt $8 \cdot 8 = 64$ (in FE).

Geraden und Ebenen – Übersicht (Seite 40)

Lagebeziehungen von Geraden	In der Ebene: identisch, zueinander parallel, schneiden sich. Im Raum: identisch, zueinander parallel, schneiden sich, windschief.
Punkt-Richtungs-Form einer Geradengleichung	Eine Gerade ist durch einen Punkt (Ortsvektor, Stützvektor) und einen Richtungsvektor festgelegt.
Strecke	$\overline{AB}$: $\vec{x} = \vec{a} + t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ mit $0 \le t \le 1$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Punktprobe	Wenn ein Punkt P auf einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ liegt, gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{v}$.
Schneidende Geraden	Das zugehörige Gleichungssystem ist dann eindeutig lösbar, d. h. es gibt eindeutig festgelegte Parameterwerte in den Geradengleichungen für die Darstellung des Schnittpunktes.
Lagebeziehungen von Ebenen	Identisch, zueinander parallel, schneiden sich in einer Schnittgeraden.
Punktmenge	Es wird ein Parallelogramm im Raum mit dem Eckpunkt A und den Seitenlängen $\lvert\vec{u}\rvert$ und $\lvert\vec{v}\rvert$ beschrieben.
Gerade und Ebene	Lagebeziehungen: g liegt in E, g ist parallel zu E, g und E schneiden sich in einem Punkt.
Spurpunkte einer Ebene	Die Spurpunkte sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Zwei Koordinaten der Spurpunkte müssen also jeweils null gesetzt werden, um die fehlende dritte Koordinate zu bestimmen.
Spurpunkte einer Geraden	Die Spurpunkte einer Geraden sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen.
Gerade durch zwei Punkte	$g: \vec{x} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$
xy-Ebene	$E: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $r,s \in \mathbb{R}$ oder $E: z = 0$
Koordinatenform	Die Darstellung $2x - 3y + z = 0$ beschreibt eine Ebene durch den Ursprung. Mehr Aussagen können noch nicht getroffen werden.
Lage von zwei Ebenen	Die Ebenen E und F sind zueinander parallel.
Parallele Geraden	Die Richtungsvektoren sind parallel bzw. linear abhängig und beide Geraden besitzen keinen gemeinsamen Punkt.

Doppelpyramide (Seite 41)

a) $A = (1|0|0{,}5)$; $B = (1|1|0{,}5)$; $C = (0|1|0{,}5)$; $D = (0|0|0{,}5)$; $S = (0{,}5|0{,}5|0)$; $T = (0{,}5|0{,}5|1)$

b) Die Gerade durch S und T ist eine Parallele zur x_3-Achse, die durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ beschrieben werden kann.

c) Der Mittelpunkt $M_Q = (0{,}5|0{,}5|0{,}5)$ des Quadrates liegt auf der Geraden durch S und T, da gilt:
$\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

d) e: $\overline{SA}$; f: $\overline{CT}$; g: $\overline{SA}$; h: $\overline{BC}$; i: $\overline{TB}$; k: $\overline{DC}$

e) $\overline{AC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$; $\overline{BD}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$

Quader (Seite 42)

1] $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S = (2|3|1)$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

2 a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ d) z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

3 Die Geradengleichungen der beiden Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{CE}$ sind:

g_{AG}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ und g_{CE}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$.

a) Der Punkt S = (2|3|1) liegt für t = 2 auf der Geraden g. Da der Richtungsvektor von g linear unabhängig ist zu den Richtungsvektoren der Raumdiagonalen, schneidet die Gerade g die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{CE}$.

b) Der Punkt A ist sowohl Ortsvektor von g als auch von g_{AG}. Die zugehörigen Richtungsvektoren sind linear unabhängig, deshalb schneidet g die Raumdiagonale $\overline{AG}$ in A. Die Bestimmung des Schnittpunktes von g und der Raumdiagonalen $\overline{CE}$ liefert, dass beide zueinander windschief sind.

c) Durch Rechnung oder geometrische Anschauung kann man zeigen, dass g sowohl zur Raumdiagonalen $\overline{AG}$ als auch zu $\overline{CE}$ windschief ist.

d) Die Richtungsvektoren von g und g_{AG} sind linear abhängig. Da beide Geraden keinen Punkt gemeinsam haben, sind sie parallel zueinander.
Die Gerade g schneidet die Raumdiagonale $\overline{CE}$ im Punkt (1|4,5|0,5).

Dreiecke (Seite 43)

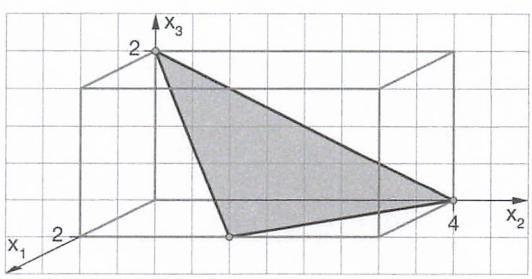
1 a) $\overline{AB}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$; $\overline{BC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$; $\overline{CA}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$

b) $M_{AB} = (2|4|2)$; $M_{BC} = (2|2|4)$; $M_{AC} = (4|2|2)$

s_{AB}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$; s_{BC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$; s_{AC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$

c) Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 1:2. Mithilfe der obigen Darstellung für die Seitenhalbierenden in Teil b) kann der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC für jede der Geradengleichungen mit $t = \frac{2}{3}$ bestätigt werden.

2 a)



b) Hier hilft die geometrische Anschauung. Der Quader liegt im 1. Oktanten, deshalb entfallen Punkte mit negativen Koordinaten; die Punkte B und F kommen nicht infrage.
Auf der Dreiecksseite $\overline{P_1P_2}$ liegen folgende Punkte: A, G.
Auf der Dreiecksseite $\overline{P_2P_3}$ liegen folgende Punkte: G, H, K.
Auf der Dreiecksseite $\overline{P_3P_1}$ liegen folgende Punkte: D, E.
Der Punkt C liegt auf keiner der Dreiecksseiten.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Steckbriefe (Seite 44)

1 $P = (p_1|p_2|0)$; Einsetzen von P in g: $t = -1$
$\Rightarrow P = (2|1|0)$

2 $P = (0|0|p_3)$; Einsetzen von P in E: $4p_3 = 20$
$\Rightarrow P = (0|0|5)$

3 $g \parallel h \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$P \in g \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $a_1 = 6 \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

4 $g \in E_1 \Rightarrow u_1 = u_2$ und $a_1 = a_2$

$g \in E_2 \Rightarrow a_3 = 2$ und $u_3 = 0$

$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5 $g \parallel \overline{AD}$ und $S \in g \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6 $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7 $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

8 Es muss gelten:

(I) $2a - 2b + c = d$
(II) $2a + 2b + c = d$
(III) $7c = d$

Wir wählen $d = 7$. Aus (III) folgt $c = 1$;
aus (I), (II) und (III) folgen $b = 0$ und $a = 3$.
$\Rightarrow E: 3x + z = 7$

Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Geraden per Hand (Seite 45)

1 a) $r = 0; s = -1$: $S = (3|1|-2)$

b) $r = -1; s = -1$: $S = (-1|4|-1)$

c) $r = 1; s = 2$: $S = (-2|2|-1)$

d) $r = -1; s = -0{,}5$: $S = (1|1|-3)$

e) Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Die beiden Geraden sind identisch.

f) Die beiden Geraden haben keinen Schnittpunkt. Sie sind parallel zueinander.

2 a) $r = -1; s = -0{,}5$

b) $r = 2; s = -1$

c) $r = 2; s = 2$

d) $r = 4; s = 2$

e) keine Lösung

f) keine eindeutige Lösung: $s = -1{,}5r - 1$; $r \in \mathbb{R}$

3 a) $S_{12} = (-1|0|0)$; $S_{13} = (-1|0|0)$; $S_{23} = (0|-0{,}5|0{,}5)$

b) $S_{12} = (1|0|0)$; $S_{13} = (1|0|0)$; da die x_2x_3-Ebene und die Gerade zueinander parallel sind, gibt es keine weiteren Spurpunkte.

Lineare Gleichungssysteme – Schnitt von Ebenen per Hand (Seite 46)

1 a) $r = -1; s = 3; t = 2$: $S = (6|-3|1)$

b) $r = 9; s = 6; t = 9$: $S = (-15|26|15)$

c) $r = 2; s = 2; t = -1$: $S = (2|2|1)$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

d) E und g haben keinen Schnittpunkt, da sich eine falsche Aussage ergibt; d. h. g liegt parallel zu E.
E und h dagegen haben unendlich viele Schnittpunkte, da eine wahre Aussage der Form 0 = 0 entsteht; d.h. die Gerade h liegt in E.

2 a) $r = -1; s = 1; t = -1$ b) $r = 1; s = 0; t = 1$ c) $r = 1; s = 3; t = -3$

3 a) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $s: \vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 Spurpunkte: $S_1 = (6|0|0)$; $S_2 = (0|9|0)$; $S_3 = (0|0|-18)$

$\Rightarrow$ Spurgeraden: $s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s_{31}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebenen und Geraden (Seite 47)

1

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$	c) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Gleichungssystem: I: $2 + 2r + 0s = 0$ II: $1 + 0r - 4s = 4 + 2t$ III: $6 + 2r + s = -8 + 4t$	Gleichungssystem: I: $2 + 2r + 0s = 0 + 2t$ II: $1 + 0r - 4s = 1 - 4t$ III: $6 + 2r + s = 4 + 3t$	Gleichungssystem: I: $2 + 2r + 0s = 0 + 2t$ II: $1 + 0r - 4s = 1 - 4t$ III: $6 + 2r + s = 0 + 3t$
Umformung 1: $r = -1$ $-4s - 2t = 3$ $2r + s - 4t = -14$	Umformung 1: $2r - 2t = -2$ $-4s + 4t = 0$ $2r + s - 3t = -2$	Umformung 1: $2r - 2t = -2$ $-4s + 4t = 0$ $2r + s - 3t = -6$
Umformung 2: $8s + 4t = -6$ $s - 4t = -12$ Folgerung: $9s = -18$	Umformung 2: $2r - 2t = -2$ $s = t$ $2r - 2t = -2$	Umformung 2: $2r - 2t = -2$ $s = t$ $2r - 2t = -6$
Berechnung von r, s und t: $r = -1; s = -2; t = 2{,}5$	Beziehung zwischen r, s und t: $r = t - 1; s = t$; t frei wählbar	Die 1. und 3. Gleichung ergeben einen Widerspruch.
Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.	Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.	Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
Ergebnis: g schneidet E in $S = (0|9|2)$.	Ergebnis: h liegt in E.	Ergebnis: k ist parallel zu E.

2 Für verschiedene Parameterwerte r, s werden die zu E gehörigen Punkte bestimmt:
$r = 0, s = 0$ ergibt den Punkt $P = (1|2|4)$,
$r = 1, s = 0$ den Punkt $Q = (0|4|6)$ und
$r = 0, s = -1$ den Punkt $R = (6|0|0)$.

Aus den Koordinaten dieser Punkte erhält man das lineare Gleichungssystem:
I: $a + 2b + 4c = 12$
II: $4b + 6c = 12$
III: $6a = 12$

Aus III folgt $a = 2$; eingesetzt in I ergeben sich:
I′: $2b + 4c = 10$
II: $4b + 6c = 12$
Dies führt zu $b = -3$ und $c = 4$.
Die gesuchte Koordinatenform lautet: $E: 2x - 3y + 4z = 12$.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Oktaeder (Seite 48)

1 a) $C = (-4|4|0)$; $D = (-4|-4|0)$

b) Alle vier Kanten des Quadrats ABCD haben die Länge 8.
Eine Diagonale des Quadrats ABCD hat die Länge $d = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{128} = 2\sqrt{32}$.

Es gilt also $d(A, O) = \sqrt{32}$. Damit folgt für das Dreieck AOE aufgrund des Satzes des Pythagoras $d(A, E) = 8$. Dies gilt für alle acht „schrägen" Kantenlängen in dem Oktaeder.

c) Entscheidung aus der Anschauung:
Die Gerade AF hat einen Schnittpunkt mit g, nämlich den Punkt A;
die Gerade CD ist parallel zu g;
die Gerade FC ist windschief zu g.

d) Rechnerische Bestätigung:

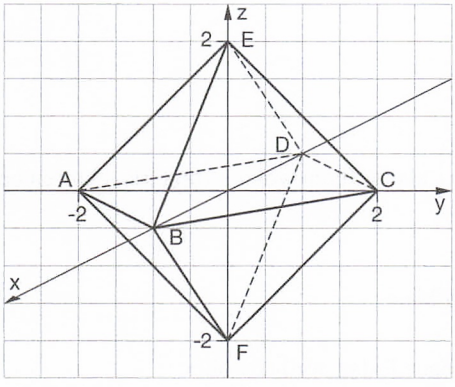
$$\text{AF: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -\sqrt{32} \end{pmatrix}; \quad \text{CD: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{FC: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{32} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ \sqrt{32} \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren der Geraden AF und g sind linear unabhängig; beide haben offensichtlich den Punkt A gemeinsam. Die Geraden schneiden sich.
Die Richtungsvektoren der Geraden CD und g sind linear abhängig; beide haben keinen Punkt gemeinsam. Die Geraden sind parallel.
Jeder Punkt der Geraden g hat die x-Koordinate 4 und die z-Koordinate 0. Dies trifft für keinen Punkt der Geraden FC zu, wie aus $\text{FC: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{32} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ \sqrt{32} \end{pmatrix}$ zu sehen ist.

(Für $x = 4$ muss $t = -1$ sein; für $z = 0$ aber $t = 1$. Das ist ein Widerspruch.)

e) Es sind die Geraden AC und BD.

2 a)



b) Jede Seitenfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = \sqrt{8}$, der Höhe

$h = \sqrt{\sqrt{8}^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$ und dem Flächeninhalt $A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Die Oberfläche des Oktaeders beträgt $A_O = 8 \cdot A = 16\sqrt{3}$.

c) Die Seitenfläche $S_2 = CDF$ ist parallel zu $S_1 = ABE$.

Begründung: S_2 liegt in der Ebene E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Der erste Richtungsvektor stimmt mit $\vec{u}_1$ überein, der zweite mit $\vec{u}_1 - \vec{v}_1$. Beide Richtungsvektoren von E_2 sind also als eine Linearkombination der Richtungsvektoren von E_1 darstellbar. Weiterhin haben beide Ebenen keinen Punkt gemeinsam, sie müssen somit parallel sein.

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Allerlei zu Geraden und Ebenen (Seite 49)

1 a) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 0 = 0$ (Orthogonalitätsbedingung).

c) $g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

d) $g_4\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind und es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden gibt.

e) $g_5\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, wobei der Richtungsvektor von g_5 aufgrund der Orthogonalität zur Ebene E folgende Bedingungen erfüllen muss:
(I) $a_1 \cdot (-5) + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 = 0$
(II) $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot (-1) + a_3 \cdot 1 = 0$
Eine Lösung des LGS lautet: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$.
Natürlich sind auch alle Vielfache dieses Richtungsvektors Lösungen des LGS.

f) $g_6\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $g_7\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ als Differenzvektor von Ortsvektoren bestimmt werden muss.

In a), e), h) und i) gibt es genau eine solche Gerade bzw. Ebene.

2 Die Ebenengleichungen in a), e) und f) stellen dieselbe Ebene E dar, weil sowohl $A_1 = (1\,|\,0\,|\,-2)$ und $A_2 = (1\,|\,7\,|\,4)$ als auch jede Linearkombination von Vektoren aus a) und f) die Gleichung in e) erfüllen.

Die Ebene in c) ist parallel zu den identischen Ebenen in a), e) und f).

Die Parameterdarstellungen in b) und f) bilden keine Ebene, sondern eine Gerade. Das liegt daran, dass in beiden Darstellungen die Richtungsvektoren jeweils zueinander linear abhängig sind.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geradenscharen (Seite 50)

1 a) Die Stützvektoren liegen auf der Geraden k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Alle Schargeraden haben denselben Richtungsvektor. Aus diesem Grund und aufgrund der Tatsache, dass die Richtungsvektoren der Schargeraden und der Geraden der Stützvektoren linear unabhängig sind, muss g_a eine Parallelenschar sein.

Ein Punkt $Z = (0|0|z)$ der x_3-Achse ist auch ein Punkt der Geradenschar g_a.
Dies führt zu den drei Gleichungen:

$1 + a - 2t = 0$
$3 + 3a + t = 0$
$3 - a - t = z$

Die Lösung dieses LGS lautet: $a = -1; t = 0; z = 4$.

Die Gerade g_{-1}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ist die gesuchte Gerade.

b) Alle Schargeraden haben den Stützvektor $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$. Für je zwei verschiedene Parameterwerte a_1 und a_2 sind die zugehörigen Richtungsvektoren der Geradenschar linear unabhängig. Die Geraden schneiden sich somit alle im Punkt $P = (2|0|2)$.

Schnittpunkte mit der x_1x_2-Ebene: Aus $x_3 = 0$ folgt $2 - ta = 0$.
Für $a = 0$ ergibt sich der Widerspruch $2 = 0$, d. h. h_0 hat keinen Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene.
Für $a \neq 0$ ist $t = \frac{2}{a}$ und ein Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene existiert. Somit gilt für den Spurpunkt S_{12}:

$\vec{s}_{12} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{a}\begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-\frac{2}{a}\\4+\frac{4}{a}\\0\end{pmatrix}$. Die Spurpunkte lauten damit $S_{12} = \left(4 - \frac{2}{a}\middle|4 + \frac{4}{a}\middle|0\right)$.

2 a) Alle Geraden der Schar haben den gleichen Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, welcher unabhängig von a ist. Für unterschiedliche a sind somit je zwei Geraden parallel.

b) $\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\2a\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3 = a+1+t\\7 = 2a-t\\2 = 3+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3 = 3\\a = 3\\t = -1\end{cases}$

$\Rightarrow$ Die Gerade g_3 verläuft durch P.

c) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\2a\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = a+1+t\\0 = 2a-t\\0 = 3+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = -4{,}5\\a = -1{,}5\\t = -3\end{cases}$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.
$\Rightarrow$ Der Ursprung liegt auf keiner der Schargeraden.

d) Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases}0 = a+1+t\\x_2 = 2a-t\\0 = 3+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\x_2 = 7\\t = -3\end{cases}$

$\Rightarrow$ Die Schargerade g_2 schneidet die x_2-Achse im Punkt $S = (0|7|0)$.

e) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$; Punktprobe für $(a+1|2a|3)$: $\begin{cases}a+1 = 3+2r\\2a = 1-2r\\3 = 4+2r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\2 = 2\\r = -0{,}5\end{cases}$

$\Rightarrow$ h gehört zur Schar, denn $h = g_1$.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Geraden im Einheitswürfel (Seite 51)

1 Ja, die Kante $\overline{BC}$ des Würfels liegt auf der Geraden g.

2 Es handelt sich um die Kante $\overline{AE}$.

3 Ja, sie bilden das orthogonale Koordinatensystem ausgehend vom Koordinatenursprung D.

4 Die Diagonale d verläuft durch A und G.
Die Gerade g schneidet d in A, h schneidet d in G.

5 Ja, die Raumdiagonalen schneiden sich im Mittelpunkt des Würfels $S = \left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$.

6 Zum Beispiel haben die drei parallelen Kanten $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

7 Die Schnittpunkte der Diagonalen der sechs Seitenflächen lauten:
$P_1 = \left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\middle|0\right)$; $P_2 = \left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\middle|1\right)$; $P_3 = \left(\frac{1}{2}\middle|0\middle|\frac{1}{2}\right)$; $P_4 = \left(\frac{1}{2}\middle|1\middle|\frac{1}{2}\right)$; $P_5 = \left(0\middle|\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$; $P_6 = \left(1\middle|\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$.

8 Die Flächendiagonalen AF: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und AH: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ schneiden sich im Punkt $A = (1|0|0)$.

Punktmengen und Spurpunkte (Seite 52)

1 Es gehören zusammen: (1) – (E); (2) – (C); (3) – (B); (4) – (G); (5) – (A); (6) – (D); (7) – (F).

2 a) Man ermittelt – wenn möglich – die drei Werte für t, für die der zugehörige Punkt der Geraden jeweils die x-Koordinate 0, die y-Koordinate 0 und die z-Koordinate 0 hat. Für diese Parameterwerte von t ermittelt man die vollständigen Koordinaten und erhält so die Spurpunkte.

Berechnung der Spurpunkte von g:
Die x-Koordinate 0 erhält man für $t = -0{,}5$. Der zugehörige Spurpunkt ist $S_{23} = (0|0{,}5|4{,}5)$.
Die y-Koordinate 0 erhält man für $t = -1$. Der zugehörige Spurpunkt ist $S_{13} = (-2|0|6)$.
Die z-Koordinate 0 erhält man für $t = 1$. Der zugehörige Spurpunkt ist $S_{12} = (6|2|0)$.

b) (I) Falsch, siehe (II).
(II) Wahr.
(III) Falsch: Jede Gerade muss mindestens eine der Koordinatenebenen schneiden.
(IV) Falsch: Wenn die Gerade parallel zu einer der Koordinatenachsen verläuft, hat sie genau einen Spurpunkt und geht nicht durch den Ursprung.

3 a) Setzt man jeweils zwei Koordinaten gleich 0, so erhält man folgende Spurpunkte von E:
$S_1 = (4|0|0)$, $S_2 = (0|-3|0)$ und $S_3 = (0|0|6)$.

Die Geraden S_1S_2, S_1S_3 und S_2S_3 sind die Spurgeraden:
S_1S_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$; S_1S_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$; S_2S_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Der Anfangspunkt von g ist der Schnittpunkt mit der yz-Ebene: $S_{23} = (0|-1|1)$.
Den zweiten Spurpunkt, den Schnittpunkt mit der xz-Ebene, erhält man für $t = 1$.
Es ist der Punkt $S_{13} = (1|0|4{,}5)$.

Den dritten Spurpunkt, den Schnittpunkt mit der xy-Ebene erhält man für $t = -\frac{2}{7}$.

Es ist der Punkt $S_{12} = \left(-\frac{2}{7}\middle|-\frac{9}{7}\middle|0\right)$.

c) Es ist der Punkt S_{13}. Er liegt in E, denn es gilt: $3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4{,}5 = 12$.

Vierecke (Seite 53)

1 Die Länge der Seiten ist durch A und B gegeben: $s = d(A, B) = \sqrt{0{,}5^2 + 4^2 + 2^2} = 4{,}5$.

- Mit $d(B, C) = 4{,}5$ gilt $\sqrt{0{,}5^2 + x^2 + 2^2} = 4{,}5$; also $x = 4$ oder $x = -4$. Für $x = -4$ wäre $C = A$; also muss $x = 4$ gelten.
  Mit $d(C, D) = 4{,}5$ gilt $\sqrt{0{,}5^2 + 4^2 + (2-y)^2} = 4{,}5$; also $y = 0$ oder $y = 4$.
- Für $y = 4$ lägen A und C auf der Höhe 2 sowie B und D auf der Höhe 4; ABCD wäre in dem Fall kein ebenes Viereck.

2
- V_1 ist ein ebenes Viereck, weil alle Eckpunkte auf der von den parallelen Geraden aufgespannten Ebene liegen.
- V_2 kann eben oder nicht eben sein.
- V_3 ist ein ebenes Viereck, weil alle Eckpunkte auf der von den Diagonalen aufgespannten Ebene liegen.
- V_4 kann kein ebenes Viereck sein.

3 a) $B = (4|3|0)$; $E = (4|0|2)$; $F = (4|3|2)$; $G = (0|3|2)$

b) Es muss gelten: $0 \le r \le 4$ und $0 \le s \le 2$.

c) Es muss gelten: $-4 \le r_1 \le 0$ und $0 \le s_1 \le 2$.

d) R: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $0 \le r \le 1$ und $0 \le s \le 1$

Schnittmengen (Seite 54)

1 a)
- Wenn g und h sich schneiden, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *linear unabhängig;* die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ lässt sich *als eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben.*
- Wenn g und h identisch sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *linear abhängig;* die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist ein *Vielfaches von beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.*
- Wenn g und h parallel sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *linear abhängig;* die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist kein *Vielfaches von beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.*
- Wenn g und h windschief sind, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *linear unabhängig;* die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ lässt sich nicht *als eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben.*
- Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, dann können g und h *sich schneiden oder windschief sein.*
- Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, dann können g und h *identisch oder zueinander parallel sein.*

b)
- Falsch: $\vec{a} = \vec{b}$ muss nicht gelten, sondern der Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$ muss ein Vielfaches einer der Richtungsvektoren sein.
- Wahr.
- Wahr.
- Falsch: die Geraden können sich auch schneiden, wenn der Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$ eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

2 Die Zahl 11 in der ersten Reihe der Matrix M muss –11 lauten.

3 Wenn g_a parallel zu E sein soll, muss der Richtungsvektor von g_a sich darstellen lassen als Linearkombination der Richtungsvektoren von E. Es muss gelten: $\begin{pmatrix}2\\4\\a\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Die zweite Zeile ergibt $r = -2$. Dies führt in der ersten Zeile zu $s = 0$. Also gilt: $a = -16$.
Damit die Gerade g_{-16} die gewünschte Eigenschaft hat, muss noch ausgeschlossen werden, dass der Ortsvektor von E auf g_{-16} liegt. Mit $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \neq t\begin{pmatrix}2\\4\\-16\end{pmatrix}$ ist dies erfüllt.

Multiple Choice (Seite 55)

a) (B) b) (A), (C) c) (A), (D)

d) (A) Falsch: z. B. können drei Geraden parallel zueinander liegen.
(B) Wahr.
(C) Falsch: der Richtungsvektor der Geraden müsste $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ bzw. ein Vielfaches hiervon sein.
(D) Falsch: die Punktmenge X beschreibt eine Gerade, da die Richtungsvektoren parallel sind.

Würfelschnitte (Seite 56)

Ebene 1

Gleichung 3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

Koordinatenform 2: $x + y + 2z = 8$

Ebene 2

Gleichung 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Koordinatenform 3: $x + y + z = 6$

Ebene 3

Gleichung 4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Koordinatenform 4: $2x - y + z = 8$

Ebene 4

Gleichung 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Koordinatenform 1: $x - y = 0$

Kunsthalle (Seite 57)

a) Für die Länge d der Kanten gilt: $d = \sqrt{8^2 + 8^2 + 12^2} = \sqrt{272} \approx 16{,}49$.
Die Kanten sind ca. 16,50 m lang.

Für die Höhe h der Seitenflächen gilt: $h = \sqrt{\sqrt{272}^2 - 8^2} = \sqrt{208} \approx 14{,}42$.
Die Höhen der Seitenflächen sind ca. 14,4 m lang.

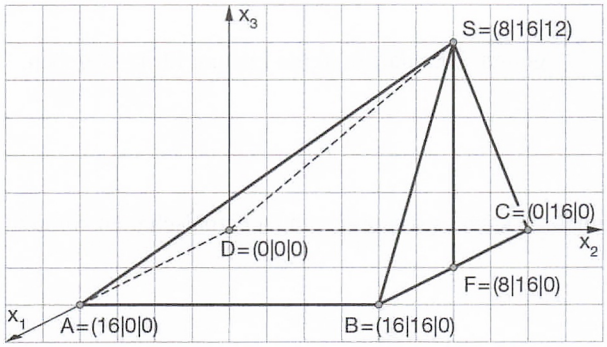
b) Jede Seitenfläche hat den Flächeninhalt $A_S = 14{,}42\,\text{m} \cdot 8\,\text{m} = 115{,}36\,\text{m}^2$.
Für zwei Flächen werden ca. $231\,\text{m}^2$ Glas benötigt.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

c) Für den unteren Scheinwerfer ist der Lichtstrahl die Gerade g durch L = (–4|20|20) und S = (8|8|12);
also g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix}$. P = (26|–10|0) liegt auf g für t = 2,5.

Für den oberen Scheinwerfer ist der Lichtstrahl die Gerade h durch L = (–4|20|24) und S = (8|8|12);
also h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$. Sie durchstößt den Boden für t = 2. Der Schattenpunkt von S ist Q = (20|–4|0).

d) S = (8|16|12)



e) Für die Seiten des Dreiecks ABS gilt:
$d_1 = d(A, B) = \sqrt{16^2}$;
$d_2 = d(B, S) = \sqrt{8^2 + 12^2}$;
$d_3 = d(A, S) = \sqrt{8^2 + 12^2 + 16^2}$.
Es gilt also: $d_1^2 + d_2^2 = d_3^2$.
Der Winkel bei B beträgt also 90°
(Umkehrung des Satzes des Pythagoras).
$\overline{SB}$ hat die Länge 14,42 m; $\overline{AB}$ ist 16 m lang. Der Flächeninhalt der Seitenfläche beträgt demnach:
14,42 m · 8 m = 115,36 m².
(Die Größe der Fläche hat sich durch die Verschiebung der Spitze nicht geändert.)

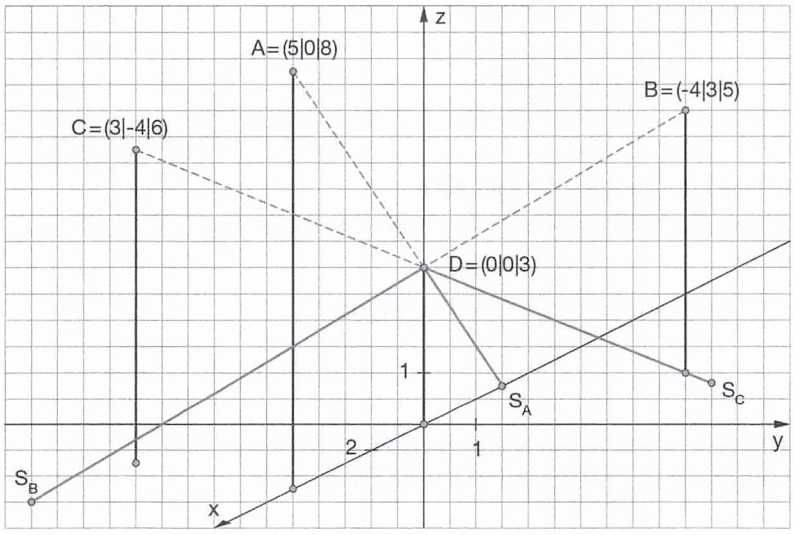
f) Der Inhalt der Fläche BCS beträgt nun: 16 m · 6 m = 96 m².

g) Die Behauptung ist richtig; es werden nur noch ca. 212 m² Glas gebraucht.

Schatten eines Denkmals (Seite 58)

a) Der höchste Scheinwerfer A wirft den kürzesten Schatten; B wirft den längsten Schatten.

b)/c)



Schattenpunkt S_A durch Scheinwerfer A:
AD: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, t > 0; Schnittpunkt S_A mit der xy-Ebene: z = 0 für t = 1,6. Also gilt: $S_A = (-3|0|0)$.

Schattenpunkt S_B durch Scheinwerfer B:
BD: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, t > 0; Schnittpunkt S_B mit der xy-Ebene: z = 0 für t = 2,5. Also gilt: $S_B = (6|-4,5|0)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Schattenpunkt S_C durch Scheinwerfer C:

CD: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t > 0$; Schnittpunkt S_C mit der xy-Ebene: $z = 0$ für $t = 2$. Also gilt: $S_C = (-3|4|0)$.

Länge der Schatten: durch A 3 m; durch B 7,5 m; durch C 5 m.
Die Vermutung aus Teilaufgabe a) kann bestätigt werden.

d) Ein Scheinwerfer hat die Koordinaten $W = (x|y|z)$ mit $z \leq 3$.

Dann gilt für den Lichtstrahl d: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 3-z \end{pmatrix}$, $t > 0$.

Für den Schnittpunkt mit der xy-Ebene muss $t = \frac{z}{z-3}$ gelten. Hier darf es keine Lösung für $t > 1$ geben, wenn $z \leq 3$ gilt.

Also: $t = \frac{z}{z-3} > 1 \underset{z \leq 3}{\Leftrightarrow} z < z - 3 \Leftrightarrow 0 < -3$.

Das ist ein Widerspruch. Unter der geforderten Annahme kann es somit keinen Denkmalschatten auf dem Boden geben.

Check up 1 (Seite 59)

1 a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\overline{PQ}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

d) $A = (-14|3|6) \in g$ für $t = 3$; $B(-4|1|6) \in h$ für $t = 1$.

e) Es gilt: $d(P, Q) = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$; $d(Q, R) = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}6$ und $d(R, P) = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$. Der Umfang des Dreiecks D beträgt etwa 15,5 LE.

2 a) Zuordnung durch Anschauung: AB und AE haben einen Schnittpunkt, nämlich A; AB und DC sind parallel; AE und DC sind windschief.

Rechnerischer Nachweis:

Aus AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, AE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und DC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist zu sehen:

- A ist gemeinsamer Stützpunkt der Geraden AB und AE.
- AB und DC haben denselben Richtungsvektor. Da der Punkt D nicht auf der Geraden AB liegt, sind beide Geraden also parallel.

Die Gleichsetzung AE = DC führt zum folgenden Gleichungssystem:

(I) $-2t_2 + 4t_3 = -4$
(II) $-4t_3 = -4$
(III) $3t_2 = 0$

Aus (II) folgt $t_3 = 1$; aus (III) folgt $t_2 = 0$. In (I) eingesetzt ergibt sich $4 = -4$.
Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden sind windschief.

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $F = (0|2|3)$, $G = (-2|0|3)$, $H = (0|-2|3)$

3 a) Einsetzen der drei Punkte führt zu folgendem Gleichungssystem:
(I) $6a + 4b = 24$ (II) $4b - 3c = 24$ (III) $-6c = 24$
Aus (III) folgt $c = -4$; in (II) eingesetzt ergibt sich $b = 3$; (I) führt zu $a = 2$.
Die Koordinatenform von E_1 lautet: $2x + 3y - 4z = 24$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Gleichsetzen von Ebene E_1 in Punkt-Richtungs-Form und der Koordinatendarstellung von Ebene E_2 liefert als Lösung die Gerade g (siehe c)); die Ebenen sind nicht parallel.

c) Jeder Punkt von g lässt sich darstellen durch $P = (2t|24|12 + t)$.
$P \in E_1$, denn $2 \cdot 2t + 3 \cdot 24 - 4 \cdot (12 + t) = 4t + 72 - 48 - 4t = 24$.
$P \in E_2$, denn $1 \cdot 2t + 1 \cdot 24 - 2 \cdot (12 + t) = 2t + 24 - 24 - 2t = 0$.
Die Gerade g liegt sowohl in E_1 als auch in E_2. Sie ist also Schnittgerade der beiden Ebenen, weil Schnittgeraden von Ebenen eindeutig sind.

4 E hat die Gleichung $E: \vec{x} = \vec{s}_1 + r(\vec{s}_2 - \vec{s}_1) + s(\vec{s}_3 - \vec{s}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Spurgeraden sind $g: \vec{x} = \vec{s}_1 + t(\vec{s}_2 - \vec{s}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \vec{s}_2 + t(\vec{s}_3 - \vec{s}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

und $k: \vec{x} = \vec{s}_3 + t(\vec{s}_1 - \vec{s}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Check up 2 (Seite 60)

1 a) $\overline{P_1P_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$; $\overline{P_2P_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$; $\overline{P_3P_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$

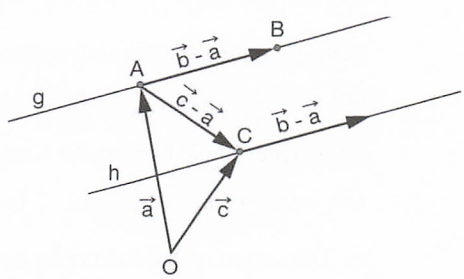
b) Der Punkt $M = (2|3|1)$ liegt auf der Strecke $\overline{P_2P_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$ im Würfel, da für $t = \frac{1}{2}$ die Punktprobe erfüllt ist.

c) Zum Beispiel $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r\overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) Der Schwerpunkt des Würfels ist $S = (2|2|2)$. S liegt auf E, da für $r = s = \frac{1}{3}$ die Punktprobe erfüllt ist.

e) Die Schnittgerade ist $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Schnittgerade schneidet den Würfel in den Punkten $W_1 = (4|0|2)$ und $W_2 = (2|0|4)$. Dies ist im Übrigen P_1.

2 a) Skizze:
A ist der Stützpunkt, als Richtungsvektoren der Ebene dienen der Richtungsvektor $(\vec{b} - \vec{a})$ der Geraden und der Differenzvektor der beiden Stützvektoren $(\vec{c} - \vec{a})$.



Ebenengleichung:
Durch die Gleichung $E: \vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{b} - \vec{a})$ werden lediglich Punkte beschrieben, die auf der Geraden g liegen. Auch wenn die Form äußerlich einer Ebenengleichung ähnelt, ist es doch nur eine Geradengleichung, denn die beiden Richtungsvektoren sind kollinear.

Andere Ebenengleichung:
Andere Stützpunkte der Ebene sind z. B. B oder C. Andere Paare von Richtungsvektoren sind z. B. $(\vec{b} - \vec{a})$ und $(\vec{b} - \vec{c})$ oder $(\vec{b} - \vec{a})$ und $(\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a})$.

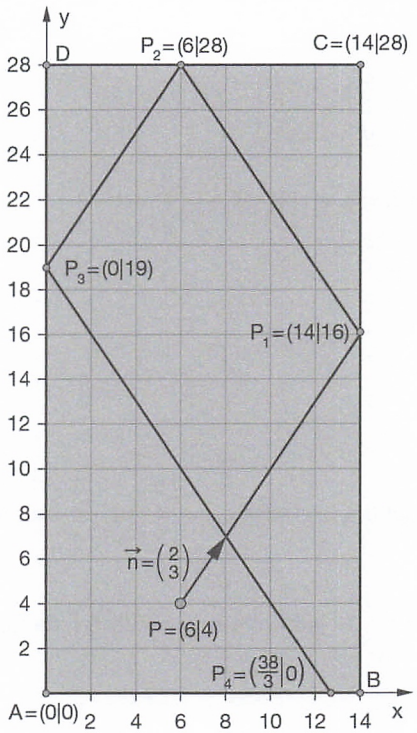
ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Als Stützpunkt sind z. B. die Punkte A, C oder B geeignet. A und B liegen auf g, C liegt auf h. Die Richtungsvektoren $(\vec{b}-\vec{a})$ und $\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$ sind kollinear, da es sich um parallele Geraden handelt.

Deshalb darf nur einer der beiden verwendet werden. Als zweiten Richtungsvektor nimmt man z. B. den Differenzvektor der Stützvektoren von g und h.

Eine mögliche Ebenengleichung ist z. B. E: $\vec{x}=\vec{a}+r(\vec{b}-\vec{a})+s(\vec{c}-\vec{a})$.

3 a)



Regel: Einfallswinkel = Ausfallswinkel
Bande a bei x = 14
Bande b bei y = 28
Bande c bei x = 0
Bande d bei y = 0

b) Anstoßpunkt P = (6|4); Richtungsvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Richtungsvektoren der reflektierten Kugel: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{n}_3=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Berechnung des Reflexionspunktes an Bande a:

$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}+k\vec{n}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\y\end{pmatrix} \Rightarrow k=4 \Rightarrow P_1=(14|16)$

Berechnung des Reflexionspunktes an Bande b:

$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_1}+k\vec{n}_1=\begin{pmatrix}14\\16\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\28\end{pmatrix} \Rightarrow k=4 \Rightarrow P_2=(6|28)$

Berechnung des Reflexionspunktes an Bande c:

$\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_2}+k\vec{n}_2=\begin{pmatrix}6\\28\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \Rightarrow k=3 \Rightarrow P_3=(0|19)$

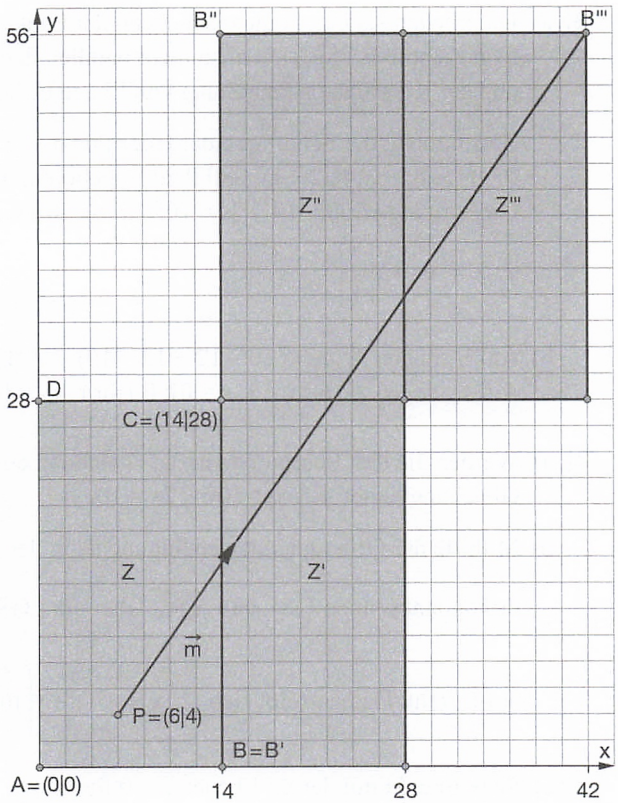
An welcher Stelle berührt die Kugel jetzt den Billardtisch?

$\overrightarrow{OP_4}=\overrightarrow{OP_3}+k\vec{n}_3=\begin{pmatrix}0\\19\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow k=\frac{19}{3} \Rightarrow P_4=\left(\frac{38}{3}\middle|0\right)$

$\Rightarrow$ Die untere rechte Ecktasche bei B = (14|0) wird verfehlt.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

c) Ausgangspunktänderung: Berechnung „vom Loch B aus“:
Die Richtungsvektoren sind die negativen aus Teil b). Die erste Bandenberührung müsste dann bei Q = (14|14) erfolgen. Leider befindet sich dort keine Bande, sondern ein Loch!
Diese Aufgabenstellung ist also nicht lösbar.
Stoßrichtungsänderung:
Geometrische Lösung: Aufgrund der Regel *Einfallswinkel = Ausfallswinkel* ist das Problem der Reflexion an einer Bande durch eine Achsenspiegelung an dieser Bande zu lösen, d. h. bei der Reflexion an der rechten Bande: Achsenspiegelung von Billardtisch Z an Bande a auf Z′ (ebenfalls von Loch B auf B′), Reflexion an der oberen Bande: Achsenspiegelung von Z′ an Bande b′ auf Z″ (ebenfalls von B′ auf B″) und zuletzt die Reflexion an der linken Bande: Achsenspiegelung von Z″ an Bande c″ auf Z‴ (ebenfalls von B″ auf B‴). Verbindet man nun den Ausgangspunkt P mit B‴ kann man den korrekten Richtungsvektor ablesen.



Somit ergibt sich als neuer Richtungsvektor: $\vec{m} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$.

d) Die Aufgabe setzt folgende Annahmen:
- Die Kugel hat keine räumliche Ausdehnung (ist punktförmig).
- Es befinden sich keine weiteren Kugeln oder Hindernisse auf dem Tisch.
- Die Reflexionen sind elastisch.
- Die Kugel besitzt keinen Effet (Drall).
- Die Stoßgeschwindigkeit ist ausreichend oder es existiert keine Reibung.

Kapiteltest 1 (Seite 61, 62)

1 a) Jeder Eckpunkt hat die x-Koordinate 0, liegt also in der yz-Ebene.

b) g_{AB}: $\vec{x} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; g_{AC}: $\vec{x} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; g_{BC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)/d) Es gilt: $d(A, B) = \sqrt{9+16} = 5$; $d(A, C) = \sqrt{25} = 5$; $d(B, C) = \sqrt{9+1} \approx 3{,}16$.
Das Dreieck D ist gleichschenklig, aber nicht gleichseitig.

2 a) $P_1 = (2|-5|6) \in g$, $t_1 = 2$; $P_2 = (2|-2|5) \in g$, $t_1 = 1$;
$Q_1 = (1|-3|5) \in h$, $t_2 = -1$; $Q_2 = (3|-1|5) \in h$, $t_2 = 1$

b) Die erste Zeile des Gleichungssystems lautet $2 = 2 + t_2$. Daraus folgt $t_2 = 0$.
Der Schnittpunkt ist S = (2|–2|5).

c) Eine Gleichung ist z. B. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 a) Die Ebenen sind nicht identisch, denn der Punkt $Q = (2|0|2)$ von E_2, den man für $r = 0$ und $s = 1$ erhält, liegt nicht in E_1. Sie sind auch nicht parallel, denn Gleichsetzen von Ebene E_2 in Punkt-Richtungs-Form und der Koordinatendarstellung von Ebene E_1 liefert als Lösung die folgende Schnittgerade g.

Bestimmung der Schnittgerade: Jeder Punkt von E_2 kann dargestellt werden durch $P = (1 + 4r + s|4r|2 + r)$. Soll P zu E_1 gehören, muss gelten: $2(1 + 4r + s) - 3 \cdot 4r + 4(2 + r) = 10$. Umformung ergibt: $10 + 2s = 10$; s muss also 0 sein. Die gesuchte Schnittgerade lautet:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Auf E_1 liegen A (denn $10 - 12 + 12 = 10$) und B (denn $2 + 8 = 10$), C nicht (denn $8 \neq 10$).
Auf E_2 liegen A (für $r = 1$; $s = 0$), B (für $r = s = 0$) und C (für $r = 0$; $s = -1$).

4 a) Werden die drei Spurpunkte in die Gleichung eingesetzt, so erhält man $a = 5$, $b = 10$ und $c = 2$. Die Gleichung lautet E: $5x + 10y + 2z = 10$.

b) Mithilfe der Orthogonalitätsbedingung kann der Richtungsvektor von g bestimmt werden. Dieser muss orthogonal sein zu $\overrightarrow{S_1S_2}$ und $\overrightarrow{S_1S_3}$. Über ein LGS erhält man hiermit den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf E steht. Damit ergibt sich g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Schnittpunkt mit der xy-Ebene: $z = 0$ für $t = 0{,}5$. Daraus ergibt sich $S_{12} = (4{,}5|6|0)$.
Schnittpunkt mit der xz-Ebene: $y = 0$ für $t = -0{,}1$. Daraus ergibt sich $S_{13} = (1{,}5|0|-1{,}2)$.
Schnittpunkt mit der yz-Ebene: $x = 0$ für $t = -0{,}4$. Daraus ergibt sich $S_{23} = (0|-3|-1{,}8)$.

d) $S_3 = (0|0|10)$ bedeutet, dass E von $(0|0|0)$ aus mit dem Faktor 2 zentrisch gestreckt wird. Es ergeben sich die Spurpunkte $S_1 = (4|0|0)$ und $S_2 = (0|2|0)$ für die Ebene E_2.

5 a) Es gilt: $\overrightarrow{A_1D_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C_1D_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Geraden A_1D_1 und B_1C_1 sind parallel; die Grundfläche ist ein Trapez.

b) $d(A_1, A_2) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$; $d(B_1, B_2) = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

c) Der Mittelpunkt von $\overrightarrow{B_1B_2}$ ist $M = (4|5|1)$; ein zu F orthogonaler Vektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt mit $t = -1$ dann $x = 4$ und $y = 4$.

Der Stützvektor trifft in $P = (4|4|0)$ auf dem Boden auf.

d) Nein, z. B. sind die Geraden $g = A_1A_2$ und $h = B_1B_2$ windschief. Das aus g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgende Gleichungssystem führt in den ersten beiden Zeilen zu $r = s = 2$; dies stimmt nicht für die dritte Zeile.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

e) Die Ebene $E = A_1B_1A_2$ kann beschrieben werden durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ (Einsetzen von B_2 in E) führt in den ersten beiden Zeilen zu r = 0,5 und s = 1; dies stimmt nicht für die dritte Zeile. Wenn die z-Koordinate von B_2 auf 3 abgeändert wird, stimmt auch die dritte Zeile des LGS. Die Seitenfläche $A_1B_1B_2A_2$ wäre dann eben.

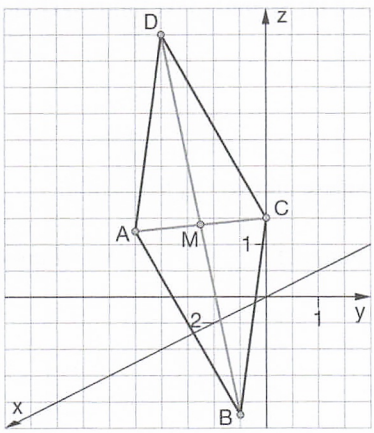
6 a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}800\\0\\-36\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $U_2 = (600|-200|-36)$ liegt auf der Route g für t = 200.

b) Das Boot befindet sich nun auf der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}600\\-200\\-36\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\40\\1{,}8\end{pmatrix}$. An der Oberfläche taucht das Boot für t = 20 auf. Dies ist der Punkt $U_3 = (800|600|0)$.

c) Die Entfernung von U_3 zu B beträgt $\sqrt{800^2 + 600^2} = 1000$. Das sind 10 000 m bzw. 10 km. Die geforderte Bedingung ist erfüllt.

Kapiteltest 2 (Seite 63, 64)

1 a)



b) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ sind kollinear und gleich lang.

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ sind kollinear und gleich lang.

Da die jeweils gegenüberliegenden Seiten sowohl parallel als auch gleich lang sind, ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

c) $\vec{m} = \vec{a} + 0{,}5(\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{b} + 0{,}5(\vec{d} - \vec{b})$

Geometrisch: M ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm. Die Diagonalen halbieren einander.

d) Es müsste gelten: $\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. Für kein t ist das erfüllt, also liegt P nicht auf AC.

2 a) Wegen der Parallelität der jeweiligen Kanten und der Tatsache, dass deren Richtungen durch die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ gegeben sind, ist die geforderte Darstellung möglich.

b) $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{BF} = \vec{w}$; $\overrightarrow{BH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{EB} = \vec{u} - \vec{w}$; $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

c) P ist Mittelpunkt der Kante $\overline{EF}$.
Q ist Schnittpunkt der Diagonalen der Deckfläche EFGH des Spates.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 a) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Stützvektor (Ortsvektor) eines Punktes P auf der Geraden, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden. Der Parameter s durchläuft alle reellen Zahlen.

b) Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Gleichsetzen der Geradengleichungen führt zu $s = 0{,}5$ und $t = -1{,}5$. Die Geraden schneiden sich.

c) $g'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Als Richtungsvektor der Geraden k wird der Differenzvektor der beiden Stützvektoren gewählt. Dieser ist zu keinem der beiden Richtungsvektoren kollinear. Die Gerade $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneidet die Geraden g und g′ jeweils in ihren Stützpunkten.

4 a) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g und g_1 sind gleich, der Stützpunkt von g_1 liegt nicht auf g.

b) $g_2\colon \vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g und g_2 sind nicht kollinear; Ansatz für Schnittpunkt führt zu Gleichungssystem in Diagonalform, das nicht lösbar ist.

c) $g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g und g_3 sind nicht kollinear, der Stützpunkt von g_3 liegt auf g.

5 a) (I) – Punkt C (II) – Punkt B (III) – Punkt D (IV) – Punkt A

b) Die Flugroute ist $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 4$.

Den Anfangspunkt erhält man für $t = 0$; es ist $P = (5|0|10)$.
Den Endpunkt erhält man für $t = 4$; es ist $E = (65|0|90)$.
Die in 4 Minuten zurückgelegte Strecke beträgt $d(P, E) = \sqrt{60^2 + 0^2 + 80^2}$ km = 100 km.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 1500 km/h.

6 a) Flugzeug 1: Himmelsrichtung SO ($x = 10$ und $y = 10$ im Richtungsvektor); es fliegt auf gleicher Höhe ($z = 0$).
Flugzeug 2: Himmelsrichtung NO ($x = -6$ und $y = 6$ im Richtungsvektor); es sinkt ($z = -1$).

b) Gesucht ist der Punkt auf h mit $z = 0 \Rightarrow t = 11$. Man erhält für den Aufsetzpunkt $A = (34 - 66|14 + 66|0) = (-32|80|0)$.

c) Flugzeug 1 hat pro Minute $\sqrt{10^2 + 10^2}$ km $\approx 14{,}14$ km zurückgelegt; die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt ca. 850 km/h.

Flugzeug 2 hat pro Minute $\sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-1)^2}$ km $\approx 8{,}54$ km zurückgelegt; die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt ca. 510 km/h.

d) Flugzeug 1 befindet sich ständig auf einer Höhe von 9 km. Auf dieser Höhe befindet sich Flugzeug 2 nur für $t = 2$, und zwar im Punkt $P = (22|26|9)$. Flugzeug 1 befindet sich im Zeitpunkt $t = 2$ im Punkt $Q = (12|16|9)$. Die Flugzeuge sind weit genug voneinander entfernt; eine Kollisionsgefahr besteht nicht.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest 3 (Seite 65, 66)

1 a) z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ c) z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2 a) $S_{12} = (-2|1|0)$; $S_{23} = (0|1|2)$; S_{13} gibt es nicht. Die Gerade verläuft parallel zur xz-Ebene.

b) Die Spurpunkte sind $S_{12} = S_{13} = S_{23} = (0|0|0)$. Die Gerade ist eine Ursprungsgerade.

3 a) $S_1 = (-3|0|0)$; $S_2 = (0|3|0)$; $S_3 = (0|0|3)$

b) $S_1 = (1|0|0)$; $S_3 = (0|0|-1)$; S_2 gibt es nicht. Die Ebene verläuft parallel zur x_2-Achse.

c) Eine solche Ebene kann es nicht geben, denn eine Ebene schneidet immer mindestens eine Koordinatenachse.

4 Ebene AFH: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ AFH: $x - y + z = 8$

Ebene DBG: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ DBG: $x - y + z = 0$

Gerade CE: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

AFH $\cap$ CE liefert $t = \frac{16}{3}$ und Einsetzen in CE schließlich den Schnittpunkt $S = \left(\frac{16}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{16}{3}\right)$.

DBG $\cap$ CE liefert $t = \frac{8}{3}$ und Einsetzen in CE schließlich den Schnittpunkt $S = \left(\frac{8}{3}\middle|\frac{16}{3}\middle|\frac{8}{3}\right)$.

5 a) Die Geraden g und h sind identisch.

b) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $(3|-1|1)$.

c) Die Geraden g und h sind parallel zueinander.

6 a) Gerade BH: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\5\\5\end{pmatrix}$

Ebene EFD: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\5\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow$ EFD: $y + z = 6$

EFD $\cap$ BH liefert $t = \frac{3}{5}$ und Einsetzen in BH schließlich den Schnittpunkt $S = (3|3|3)$.

b) Parallele Gerade zu FG durch S ist g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$; das Verfahren aus a) angewendet auf diese Situation liefert $S_1 = (3|0{,}6|3)$ und $S_2 = (3|5{,}4|3)$.

c) Der Punkt S liegt auf der Geraden EC: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$, da die Koordinatendarstellung für $t = 0{,}6$ den Punkt S ergibt.

d) Ebene CEH: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-1\\5\end{pmatrix} \Rightarrow$ CEH: $x + z = 6$

Die Punkte $S_1 = (3|0{,}6|3)$ und $S_2 = (3|5{,}4|3)$ liegen auf der Ebene CEH.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

7 a) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $(0|2|4)$.

b) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; die beiden Geraden sind windschief.

8 AFH: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ und BGE: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$

Die Schnittgerade der beiden Ebenen lautet g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

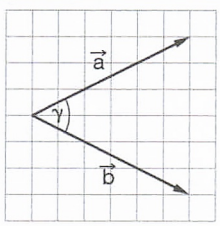
9 a) Die Ebenen schneiden sich in der Schnittgeraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\12\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

b) Die Ebenen liegen parallel zueinander, denn jeder Richtungsvektor von E lässt sich als Linearkombination der Richtungsvektoren von F schreiben und umgekehrt. Beide Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.

10 ABC: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$ und DEF: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$

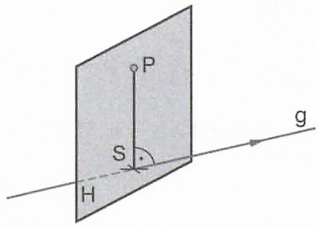
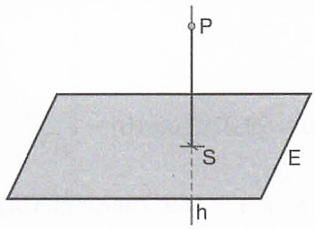
Die Schnittgerade der beiden Ebenen lautet g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{27}{4}\\\frac{15}{2}\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$.

Skalarprodukt und Messen – Übersicht (Seite 68)

Skalarprodukt	Die beiden Vektoren sind dann orthogonal zueinander.
Winkel zwischen zwei Vektoren	 $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
Koordinatenform einer Ebene	Man legt für zwei der drei vorkommenden Variablen Werte fest, setzt diese in die Ebenengleichung ein und bestimmt dann die dritte Variable. Beispiel: E: $4x_1 + x_2 + x_3 = 9$ Wähle $x_1 = x_2 = 0$; es ergibt sich $x_3 = 9$. Damit ist $(0\|0\|9)$ ein Punkt auf E.
Normalenvektor einer Ebene	Die Ebene ist durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Punkt Q auf der Ebene festgelegt.
Normalenvektor	Die Koeffizienten bilden einen Normalenvektor der Ebene, also $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Abstand Punkt-Gerade	Abstand Punkt-Gerade  *Vorgehen* (1) Hilfsebene H bestimmen, die senkrecht zu g ist und P enthält (2) Schnittpunkt S von g und H bestimmen (3) Abstand der Punkte P und S bestimmen
Senkrechte Vektoren zu einer Ebene	Der Normalenvektor steht zu allen Richtungsvektoren der Ebene senkrecht.
Abstand zwischen parallelen Geraden	Der Abstand einer Geraden zu einer parallelen Geraden lässt sich auf das Lotfußpunkt-Verfahren Punkt-Gerade zurückführen.
Winkel zwischen Geraden	Der Winkel zwischen zwei Geraden, die sich schneiden, ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren.
Abstand Punkt-Ebene	Abstand Punkt-Ebene  *Vorgehen* (1) Hilfsgerade h bestimmen, die senkrecht zu E ist und P enthält (2) Schnittpunkt S von h und E bestimmen (3) Abstand der Punkte P und S bestimmen
Ebene in Normalenform	$\vec{n}$ und $\vec{x}-\vec{q}$ stehen zueinander senkrecht, d. h. alle Punkte X, für die der Verbindungsvektor $\vec{x}-\vec{q}$ orthogonal zu $\vec{n}$ ist, liegen auf der Ebene E.
Anzahl von Normalenvektoren	Da man zu jeder Ebene einen orthogonalen Vektor findet, gibt es zu jeder Ebene einen Normalenvektor. Es gibt unendlich viele, da die Vielfachen eines Normalenvektors auch Normalenvektoren sind.
Vektorprodukt	Das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht. Die Länge $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
Kommutativgesetze	Das Skalarprodukt ist kommutativ, es gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, denn es gilt $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.
Winkel zwischen Ebenen	Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen.

Skalarprodukt (Seite 69)

1 a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=8+0+6=14$; $\vec{a}\cdot\vec{c}=0+0+24=24$; $\vec{b}\cdot\vec{c}=0+0+16=16$

b) Nein, da keines der Skalarprodukte 0 ergibt.

c) $a_3=0$

2 I: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(0+4+12)\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\\-32\\16\end{pmatrix}$

II: $((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c})\cdot\vec{d}=\begin{pmatrix}80\\-32\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=-96$

III: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})=16\cdot(-6)=-96$

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

3 Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$: $\cos(\alpha) = \dfrac{13}{\sqrt{16{,}5}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}63 \Rightarrow \alpha \approx 51{,}12°$

Winkel β zwischen $\vec{x}$ und $\vec{z}$: $\cos(\beta) = \dfrac{-3{,}5}{\sqrt{16{,}5}\cdot\sqrt{16{,}5}} = -\dfrac{7}{33} \Rightarrow \beta \approx 102{,}25°$

Winkel γ zwischen $\vec{y}$ und $\vec{z}$: $\cos(\gamma) = \dfrac{13}{\sqrt{16{,}5}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}63 \Rightarrow \gamma \approx 51{,}12°$

4 h ist orthogonal zu g für $y = -24$; k ist orthogonal zu g für $z = 1$ und beliebiges x.

5 a) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) E_1 und E_3 sind parallel, denn die Normalenvektoren sind linear abhängig. Sie sind aber nicht gleich, da der Ursprung zu E_3, jedoch nicht zu E_1 gehört. E_2 schneidet die beiden anderen Ebenen.

Winkel (Seite 70)

1 a) Es gilt: $\cos(\alpha) = -\dfrac{4}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{10}} \approx -0{,}17 \Rightarrow \alpha \approx 99{,}91°$; $\cos(\beta) = \dfrac{6}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{12}} \approx 0{,}42 \Rightarrow \beta \approx 65{,}16°$.

b) $\measuredangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 90°$ (Skalarprodukt ist 0), $\measuredangle(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 180°$ (linear abhängig, entgegengesetzte Richtung), $\measuredangle(\vec{a}_1, \vec{a}_4) = 90°$ (Skalarprodukt ist 0).

2 $\alpha = 81{,}67°$ gehört zu g-k, $\beta = 29{,}65°$ gehört zu g-h, $\gamma = 52{,}02°$ gehört zu h-k.

3 Mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Ebene ergibt sich für den Winkel ε zwischen $\vec{u}$ und $\vec{n}$: $\cos(\varepsilon) = \dfrac{-7}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{34}} = -0{,}18 \Rightarrow \varepsilon \approx 100{,}31°$.

Für den Winkel α zwischen Gerade und Ebene gilt: $\alpha = 90° - (180° - \varepsilon) \approx 10{,}31°$.

4 Die Rechteckflächen liegen in den Ebenen E_1: $3y + 4z = 12$ und E_2: $3y - 4z = 0$.

Mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ gilt für den Winkel α:

$\cos(\alpha) = \dfrac{-7}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}} = -0{,}28 \Rightarrow \alpha \approx 106{,}26°$ (bzw. $\alpha \approx 73{,}74°$).

5 Für den Winkel ε zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\cos(\varepsilon) = \dfrac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}$.

Für den Winkel γ zwischen $m\vec{a}$ und $n\vec{b}$ gilt: $\cos(\gamma) = \dfrac{8mn}{\sqrt{5m^2}\cdot\sqrt{14n^2}} = \dfrac{8mn}{m\sqrt{5}\cdot n\sqrt{14}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}$.

Abstände (Seite 71)

1 Für die Länge der Vektoren gilt:
$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1+36+25} = \sqrt{62}$, $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$, $\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$.
Der Streckenzug PQR ist länger als PRQ.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

2 a) g und h sind parallel, weil ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind.
Sie sind nicht gleich, da alle Punkte von g die z-Koordinate 0 und alle Punkte von h die z-Koordinate 2 haben.

b) m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 a) g und h sind nicht parallel, weil die Richtungsvektoren l. u. sind. Sie haben keinen Punkt gemeinsam, denn das zugehörige Gleichungssystem I: $t_1 = 4t_2$, II: $3 = 2 - 2t_2$ und III: $0 = 2t_2$ hat keine Lösung. Also sind g und h windschief.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Ebene, die h enthält und parallel zu g ist.

m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu E und enthält den Punkt $A = (0|3|0) \in g$.

Der Schnittpunkt S von m und E ergibt sich aus dem Gleichungssystem
I: $4r + s = 0$, II: $-2r - t = 1$, III: $2r - t = 0$.
Es ist der Punkt $S = (0|2{,}5|-0{,}5)$. $d(A, S) = \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} \approx 0{,}71$ ist der Abstand der beiden Geraden.

4 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die Gerade, die durch den Punkt $P = (1|0|0) \in E_2$ geht und orthogonal zu E_1 ist.

Der Schnittpunkt S von E_1 und g ergibt sich aus dem Gleichungssystem
I: $1 + r_1 = 1$, II: $-s_1 = t$, III: $1 + s_1 = t$.
Es ist der Punkt $S = (1|0{,}5|0{,}5)$. $d(P, S) = \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} \approx 0{,}71$ ist der Abstand der beiden Ebenen.

5 g ist orthogonal zu E, denn der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

h liegt in E, denn die drei Richtungsvektoren sind linear abhängig, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und der Anfangspunkt von h, $(0|1|5)$, liegt in E (für $r = 0$ und $s = -1$).
k ist echt parallel zu E, denn ihr Richtungsvektor ist die Summe der Richtungsvektoren von E und $O = (0|0|0)$ liegt auf k, aber nicht in E.

Würfelschnitte (Seite 72)

Ebene 1

Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenform 4: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Ebene 2

Normalenvektor: $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform 3: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Ebene 3

Normalenvektor: $\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform 1: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Ebene 4

Normalenvektor: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenform 2: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Geradenscharen (Seite 73)

1 a) Es kann keine parallelen Schargeraden geben, da alle Schargeraden den gemeinsamen Schnittpunkt $A = (1|3|-5)$ haben.

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 + ta \\ 2 = 3 + t(2-a) \\ -1 = -5 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 2 = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow P \in g_3$

c) 1. Bedingung: $\vec{n}_{E_1} \perp \vec{u}_{g_a}$, d. h.: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5a - (2-a) + 8 = 0 \Leftrightarrow 6a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

2. Bedingung: $(1|3|-5)$ liegt in E_1: Punktprobe liefert $5 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot (-5) = -8$ als wahre Aussage, also liegt g_{-1} in E_1.

d) 1. Bedingung: $\vec{n}_{E_2} \perp \vec{u}_{g_a}$, $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - (2-a) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

2. Bedingung: $(1|3|-5) \notin E_2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + r \\ 3 = 1 + r + s \\ -5 = 1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ s = 2 \\ s = -6 \end{cases} \Rightarrow (1|3|-5) \notin E_2$

Damit ist g_{-1} parallel zu E_2.

e) Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + ta \\ 0 = 3 + t(2-a) \\ 0 = -5 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6{,}5 \\ a = 4{,}4 \\ t = 1{,}25 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Die Schargerade $g_{4,4}$ schneidet die x_1-Achse im Punkt $S_1 = (6{,}5|0|0)$.

f) Für $a = 2$ sind die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig.

Es gilt $P = (1|3|-5) \notin h$, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung.

$\Rightarrow$ h gehört nicht zur Schar g_a, verläuft aber parallel zur Schargeraden g_2.

g) Parallelität zur x_1-Achse: $\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar (letzte Zeile: $4 = 0$).

Parallelität zur x_2-Achse: $\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar (letzte Zeile: $4 = 0$).

Parallelität zur x_3-Achse: $\begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ 4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar (1. Zeile: $a = 0$, 2. Zeile: $a = 2$).

2 a) Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung erhält man:
$2(2 + a + r(1 + a)) + (1 + a + ra) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2r + 3ra + 2 + 3a = 0 \Leftrightarrow r(2 + 3a) = -(2 + 3a)$

1. Fall: $2 + 3a = 0$, d. h. $a = -\frac{2}{3}$.
Dann ist die Gleichung $r(2 + 3a) = -(2 + 3a)$ für alle r lösbar; d. h. die Gerade $g_{-\frac{2}{3}}$ liegt in E.

2. Fall: $2 + 3a \neq 0$, d. h. $a \neq -\frac{2}{3}$.
Dann ist die Gleichung $r(2 + 3a) = -(2 + 3a)$ für $r = -1$ lösbar;
Für $a \neq -\frac{2}{3}$ scheiden sich g_a und E im Punkt $S_a = (1|a|1)$.

Anmerkung: Es gibt keine Schargerade, die parallel zur Ebene verläuft und nicht in der Ebene liegt.

© 2014 Schroedel, Braunschweig Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

b) Aus $E: 2x_1 + x_3 - 3 = 0$ erhält man den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E.

g_a ist senkrecht zu E, wenn der Richtungsvektor von g_a ein Vielfaches des Normalenvektors von E ist;

d. h. $\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ muss erfüllt sein.

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = 2k \\ 1-a = 0 \\ a = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Also ist $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene E.

c) Durch Gleichsetzen von g_a und h_a erhält man: $\begin{pmatrix} 2 + a + r(1+a) \\ 1 + r(1-a) \\ 1 + a + ra \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + + s \\ 1 + a - s \\ -1 + + 2s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ r = -1 \\ s = 1 \end{cases}$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es einen Schnittpunkt S* von g_a und h_a mit $S^* = (1\,|\,a\,|\,1)$.

d) $\begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu den Richtungsvektoren von g_a und h_a, wenn das Skalarprodukt der Vektoren null ist. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} = (-2+a)(1+a) + (2+a)(1-a) + 2a = -a + a^2 - 2 - a - a^2 + 2 + 2a = 0;$$

$$\begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2+a) + (2+a)(-1) + 4 = 0.$$

e) Die Ebene E_a geht durch den Schnittpunkt $S^* = (1\,|\,a\,|\,1)$ von g_a und h_a; $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E_a (siehe d)).

Es ergibt sich als Normalenform $E_a: \vec{n}_a \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OS^*}) = 0$; also $E_a: \begin{pmatrix} -2+a \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$

Somit ergibt sich als Koordinatenform $E_a: (-2+a)\,x_1 + (2+a)\,x_2 + 2x_3 = a^2 + 3a$.
E_a geht durch den Ursprung, wenn $(0\,|\,0\,|\,0)$ in E_a liegt, d. h. $a^2 + 3a = 0$.
$a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow a(a+3) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $a = -3$
Die Ebenen $E_0: -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ und $E_{-3}: -5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ gehen durch den Ursprung.

Ebenenscharen (Seite 74)

1 a) Für die Koordinatenform von E gilt: $4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$
Also ist $E = E_1$ und gehört folglich zur Ebenenschar.

b) Einsetzen von P in die Koordinatenform von E_a ergibt: $2 \cdot 3 + a \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = 1 \Leftrightarrow a = -5$
$\Rightarrow E_{-5}$ enthält P.

c) Einsetzen von Q in die Koordinatenform von E_a ergibt: $2 \cdot 5 + a \cdot 0 - 3 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$; dies ist eine wahre Aussage, unabhängig von a. Alle Scharebenen enthalten somit den Punkt Q.

d) Für $R = (0{,}5\,|\,0\,|\,0)$ ergibt eine Punktprobe ebenfalls: $2 \cdot 0{,}5 + a \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$
$\Rightarrow$ Alle Scharebenen enthalten den Punkt R.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

e) Der Normalenvektor von E ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\5\\-7\end{pmatrix}$, der Normalenvektor von E_a ist $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix}2\\a\\-3\end{pmatrix}$.

Bedingung für Parallelität: $\begin{pmatrix}2\\a\\-3\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-9\\5\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = -9s\\a = 5s\\-3 = -7s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s = -\frac{2}{9}\\a = 5s\\s = \frac{3}{7}\end{cases}$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Keine Scharebene ist parallel zu E.

f) Umformen der Parametergleichung in die Koordinatenform: Normalenform: $E_a: \begin{pmatrix}-2\\-a\\3\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\right) = 0$

$\begin{pmatrix}-2\\-a\\3\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-a\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\-a\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x_1 - ax_2 + 3x_3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + ax_2 - 3x_3 = 1$

Damit ist nachgewiesen, dass die angegebene Parameterform die Ebenenschar E_a darstellt.

g) Für eine Spurgerade in der x_1x_3-Ebene gilt: $x_2 = 0$.
In die Parametergleichung aus Teilaufgabe f) eingesetzt ergibt sich: $0 = 0 + r \cdot 0 + s \cdot 1 \Rightarrow s = 0$.

Einsetzen von $s = 0$ in die Ebenengleichung liefert die Gleichung der Spurgeraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$.

Da die Gleichung unabhängig von a ist, schneiden alle Scharebenen die x_1x_3-Ebene in derselben Geraden, also schneiden sich alle Scharebenen in der x_1x_3-Ebene.

2 a) Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$ der Ebenenschar E_a sind unabhängig von a und deshalb für alle Ebenen gleich. Somit verlaufen alle Ebenen der Schar parallel.

b) Der Normalenvektor von E_a ist $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich die Normalenform $E_a: \begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}\right) = 0$.

Es gilt: $\begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 - (3a - 18) = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = a - 6$.

Koordinatenform von E_a: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = a - 6$

c) Punktprobe von $(0|0|0)$ in der Koordinatenform der Ebenenschar: $0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = a - 6 \Leftrightarrow a = 6$
$\Rightarrow E_6$ enthält den Ursprung.

d) Es gilt: $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Die Richtungsvektoren der Gerade g und aller Ebenen der Ebenenschar sind linear abhängig.
Punktprobe von $(1|1|1)$ in der Koordinatenform der Ebenenschar: $1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = a - 6 \Leftrightarrow a = 3$
$\Rightarrow (1|1|1) \in E_3$. Somit enthält die Ebene E_3 die Gerade g.

e) Schnittpunkt mit der x_1-Achse an der Stelle 4 $\Rightarrow S_1 = (4|0|0)$
Punktprobe in der Koordinatenform der Ebenenschar: $4 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = a - 6 \Leftrightarrow a = 10$
$\Rightarrow$ Die Ebene E_{10} schneidet die x_1-Achse an der Stelle 4.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

f) Da alle Scharebenen (vgl. a)) und damit auch E_9 und E_{15} parallel verlaufen, ist der gesuchte Abstand gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes einer der Ebenen zu der anderen Ebene, z. B. von $A_9 = (9|1|2)$ zu E_{15}.

Normalenform von E_{15}: $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}15\\1\\2\end{pmatrix}\right)=0$; $\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$

$\Rightarrow$ Hesse'sche Normalenform von E_{15}: $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}15\\1\\2\end{pmatrix}\right)=0$

$\Rightarrow$ $d(E_9, E_{15}) = d(A_9, E_{15}) = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}9\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(-6)\right| = 2$

Multiple Choice (Seite 75)

a) (A) a), c), d); (B) b), c); (C) b); (D) c)

b) (A)

c) (B), (C), (D)

Skalarprodukt (Seite 76)

1 I ist wahr. Produkte und Summen aus positiven Zahlen sind immer positiv.

II ist falsch. Für $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix}$ gilt zum Beispiel $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

III ist wahr. Für $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}=r\cdot\vec{a}$ $(r\neq 0)$ gilt: $\vec{a}\cdot(r\vec{a})=r\cdot\vec{a}^2\neq 0$.

IV ist falsch. Orthogonalität hängt nicht von der Länge der Vektoren ab.

2 a) A_1: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ist eine Zahl; $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ ist ein Vektor; $((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c})\cdot\vec{d}$ ist eine Zahl.

A_2: $\vec{a}+\vec{b}$ ist ein Vektor; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$ ist eine Zahl; $((\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c})\cdot\vec{d}$ ist ein Vektor.

A_3: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ und $\vec{c}\cdot\vec{d}$ sind Zahlen; $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})$ ist eine Zahl.

b_1) In der Klammer steht jeweils eine Zahl, mit der der Vektor rechts multipliziert wird. Das Ergebnis ist ein Vektor.

b_2) I und III sind immer gleich, denn $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

b_3) Damit II und I oder II und III gleich sein können, müssen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sein.

3 I: $|\vec{a}|\leq|\vec{b}|+|\vec{c}|$ („=" gilt, falls $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gleiche Richtung haben; „<" gilt, falls $\vec{b}$ und $\vec{c}$ entgegengesetzte Richtung haben.)

II: $|\vec{a}|<|\vec{b}|+|\vec{c}|$

III: $|\vec{a}|=|\vec{b}|+|\vec{c}|$

4 Man prüft,

a) ob der Richtungsvektor von g orthogonal zu beiden Richtungsvektoren von E ist.

b) ob der Richtungsvektor von g linear abhängig vom Normalenvektor von E ist.

5 a) Man bestimmt einen zu BCS orthogonalen Vektor $\vec{u}$. Die Gerade l: $\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$ ist das gesuchte Lot.

b) $F = (q_1|q_2|0)$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Winkel (Seite 77)

1 a) Für $\alpha = \measuredangle(\vec{a}, r\vec{a})$; $r > 0$ gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{ra_1^2 + ra_2^2 + ra_3^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{r^2a_1^2 + r^2a_2^2 + r^2a_3^2}} = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

b) Für $\alpha = \measuredangle(\vec{a}, r(-\vec{a}))$; $r > 0$ gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{-ra_1^2 - ra_2^2 - ra_3^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{r^2a_1^2 + r^2a_2^2 + r^2a_3^2}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

2 I ist wahr. Begründung: Für $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{z} \cdot \vec{a} = 0$, also $\cos(\alpha) = 0$ und $\alpha = 90°$.

II ist falsch. Dies folgt aus I.

3 Die Ebenen EBCH und AFGD sind genau dann orthogonal, wenn die Rechtecksfläche ABFE ein Quadrat ist.
Begründung: Der Winkel zwischen den Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen den Geraden EB und AF. Diese sind genau dann orthogonal, wenn ABFE ein Quadrat ist.

4 a) Vermutung: Die Behauptung stimmt nicht.

b) Für den Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$.

Für den Winkel β zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ gilt: $\cos(\beta) = \dfrac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$.

$\Rightarrow \alpha \neq \beta$

5 a) Im zweiten Schritt steckt der Fehler. Es genügt nicht, eine beliebige Gerade aus E zu bestimmen, die S enthält. Die Gerade muss den Fußpunkt eines Lotes von einem Punkt von g auf E enthalten.

b) Es gilt $\beta \geq \alpha$. Der Fall $\beta = \alpha$ tritt ein, wenn im zweiten Schritt zufällig eine Gerade gewählt wird, die den Fußpunkt eines Lotes von einem Punkt von g auf E enthält.

Abstände (Seite 78)

1 a) Die beiden Ebenen sind parallel, wenn gilt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

b) Die beiden Ebenen sind identisch, wenn gilt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ und $d_1 = rd_2$.

2 I ist im Allgemeinen falsch. Setzt man in E_1 jetzt $x = y = 0$, so ergibt sich: $c_1z = d_1$.
Man erhält also $S_3 = \left(0 \middle| 0 \middle| \dfrac{d_1}{c_1}\right)$; es gilt $S_3 = (0|0|d_1)$ nur für $c_1 = 1$.

II ist wahr. Setzt man in E_2 jetzt $x = y = 0$, so ergibt sich: $z = d_2$. Man erhält also $S_3 = (0|0|d_2)$.
III ist im Allgemeinen falsch. $(0|0|d_3)$ und $(0|0|d_4)$ sind zwar die Schnittpunkte mit der z-Achse, ihr Abstand ist aber nur dann der Abstand der Ebenen, wenn diese parallel zur xy-Ebene sind.

3 (1) Man stellt die Gleichung der Ebene E auf, die g enthält und parallel zu h ist.
(2) Man fällt das Lot von einem Punkt $P \in h$ auf E.
(3) Man bestimmt den Fußpunkt F des Lotes auf E.
(4) $d(P, F)$ ist der gesuchte Abstand.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

4 (I) – (A); (II) – (C); (III) – (C); (IV) – (B)

5 Bei parallelen Geraden hat man in Punkt (1) in Aufgabe 3 unendlich viele Ebenen zur Auswahl, welche mit dem weiteren Verfahren zu unterschiedlichen Abständen führen. Grundsätzlich ist das Verfahren also nicht anwendbar.
Wählt man in (1) jedoch die Ebene, welche g enthält und senkrecht zu der Ebene ist, welche g und h enthält, so führt das Verfahren zum korrekten Abstand.

Geometrische Objekte (Seite 79)

1 *Satz:* In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Beweis: Seien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}_1$ und $\overrightarrow{DB} = \vec{d}_2$.

Dann gilt: $\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{d}_2 = \vec{p} - \vec{q}$.

Daraus folgt: $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (\vec{p} + \vec{q})(\vec{p} - \vec{q})$. (1)

Weiter gilt: $\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2$ (2) und $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt: $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$.

Also gilt: Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

2 a) A = (3|0|0) liegt auf E, denn 4 · 3 = 12; B = (3|3|0) liegt auf E, denn 4 · 3 = 12; S = (1,5|1,5|6) liegt auf E, denn 1,5 · 4 + 6 = 12.
Die Koordinatenform von BCS ergibt sich aus E durch Vertauschung von x und y; es ergibt sich E: 4y + z = 12.

b) Ein Normalenvektor von ABS ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; ein Normalenvektor der Bodenfläche ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den gesuchten Winkel gilt: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \approx 0{,}24 \Rightarrow \alpha \approx 75{,}96°$.

c) Ein Normalenvektor von ABS ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; ein Normalenvektor von BCS ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel zwischen den Normalenvektoren gilt: $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} \approx 0{,}06 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$.

Der zweite Winkel, den die Normalenvektoren miteinander bilden, beträgt 180° – 86,63° = 93,37°. Dies ist der Winkel, den die Seitenflächen miteinander bilden, da dieser immer größer als 90° ist.

3 a) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

AD und BC sind parallel; AB und CD sind gleich lang. Die Grundfläche ist ein gleichschenkliges Trapez.

b) $d(A, E) = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

c) S = BCGF liegt in der Ebene E: 4y + 3z = 16, denn es gilt für B und C: 4 · 4 = 16 und für G und F: 4 · 1 + 3 · 4 = 16.

d) Der Stützpfeiler liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

z = 0 erhält man für $t = -\frac{2}{3}$.

Der gesuchte Bodenpunkt ist dann $\left(0 \left| -\frac{1}{6} \right| 0\right)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vermischte Aufgaben (Seite 80)

1 *Satz:* Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, ist es ein Rechteck.

Beweis:

Seien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}_1$ und $\overrightarrow{DB} = \vec{d}_2$.

Dann gilt: $\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{d}_2 = \vec{p} - \vec{q}$.

Die Diagonalen sind gleich lang. Also gilt:

$|\vec{p} + \vec{q}| = |\vec{p} - \vec{q}| \Leftrightarrow (\vec{p} + \vec{q})^2 = (\vec{p} - \vec{q})^2 \Leftrightarrow 2\vec{p}\vec{q} = (-2)\vec{p}\vec{q} \Leftrightarrow \vec{p}\vec{q} = 0.$

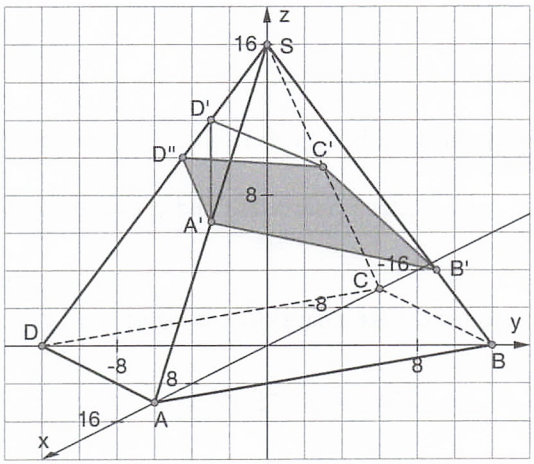
Also sind die benachbarten Seiten orthogonal; das Parallelogramm ist ein Rechteck.

2 a) Die Seitenflächen bilden stumpfe Winkel miteinander.

b) Wenn h größer wird, wird α kleiner.

c) α kann weder 180° noch 90° betragen. Es ist $90° < \alpha < 180°$.
Es gilt $h \to 0$ für $\alpha \to 180°$; es gilt $h \to \infty$ für $\alpha \to 90°$.

3 a)



b) Die Ebene E durch A′, B′ und C′ hat die Gleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Prüfung, ob D′ aus E ist, führt zu dem unlösbaren Gleichungssystem:

I: $-6r - 12s = -6$
II: $9r = 0$
III: $-4r = 8$

Das Viereck A′B′C′D′ ist folglich nicht eben.

c) D″ = (0|–4,5|10) liegt in E für r = –0,5 und s = 0,75. Das Problem ist behoben.

d) Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$; ein Normalenvektor des Bodens ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den gesuchten Winkel ergibt sich: $\cos(\alpha) = \frac{9}{\sqrt{97}} \approx 0{,}91 \Rightarrow \alpha \approx 23{,}96°$.

Motorflugzeug (Seite 81)

a) A = (20|30|5)

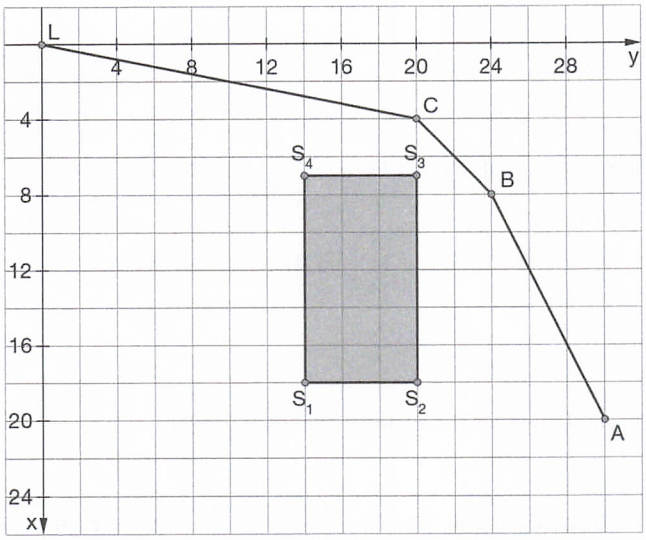
b) Das Sperrgebiet besteht aus allen Punkten, für die gilt: $7 \le x \le 18$ und $14 \le y \le 20$.

c) Im Punkt C erst werden die y-Werte des Sperrgebietes erreicht, ab diesem Punkt sind aber alle x-Werte kleiner als 7; das Sperrgebiet wird nicht überflogen.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

d)



e) $d(A, B) = \sqrt{144+36+4} = \sqrt{184} \approx 13{,}56$; $d(B, C) = \sqrt{16+16+1} = \sqrt{33} \approx 5{,}74$;
$d(C, L) = \sqrt{16+400+4} = \sqrt{420} \approx 20{,}49$. Die Gesamtlänge beträgt ca. 39,79 km.
Die Länge der direkten Strecke wäre $d(A, L) = \sqrt{400+900+25} = \sqrt{1325} \approx 36{,}40$.
Der Umweg beträgt ca. 3,39 km.

f) Die Richtungsvektoren der Geraden AB, der Geraden BC und der Geraden CL sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel zwischen AB und BC gilt: $\cos(\alpha) = \frac{74}{\sqrt{184} \cdot \sqrt{33}} \approx 0{,}95 \Rightarrow \alpha \approx 18{,}26°$.

Für den Winkel zwischen BC und CL gilt: $\cos(\alpha) = \frac{98}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{420}} \approx 0{,}83 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}65°$.

g) Für den Winkel ε zwischen dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -2 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt:

$\cos(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{420}} \approx 0{,}10 \Rightarrow \varepsilon \approx 84{,}40°$. Damit beträgt der gesuchte Winkel $\alpha \approx 5{,}60°$.

Der schief gestellte Würfel im Raum (Seite 82)

a) Es gilt $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{324} = 18$ und $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$.

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang und bilden einen rechten Winkel; die Punkte können zu einem Würfel ergänzt werden.

Bestimmung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow D = (-16|2|11)$

Bestimmung von E, F, G, H: Die Seitenlänge des Quaders beträgt $\left|\overrightarrow{BA}\right| = 18$, der Normalenvektor der Grundfläche ABCD ist $\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 144 \\ 144 \\ 252 \end{pmatrix}$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Für den normierten Normalenvektor ergibt sich $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

Damit folgt: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 18 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow E = (8|8|17)$; $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + 18 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (10|-8|25)$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 18 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 33 \end{pmatrix} \Rightarrow G = (-6|-6|33)$; $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + 18 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow H = (-8|10|25)$

Bestimmung des Neigungswinkels:

Normalenvektor der Grundfläche: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}$; Normalenvektor der Erdoberfläche: $\vec{n}_{0E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für den Winkel α zwischen Grundfläche und Erdoberfläche gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_{0E}}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{n}_{0E}|} = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha \approx 38{,}94°$

b) Der höchste Punkt des Würfels ist G = (–6|–6|33), die Höhe kann man an der x_3-Koordinate von G ablesen. Es folgt h = 33 LE = 16,5 m.
Um die Fläche bestimmen zu können, müssen aus den Eckpunkten des Würfels seine Ausmaße abgelesen werden.
$x_{1min} = -16$, $x_{1max} = 10 \Rightarrow$ Es werden 26 LE $\triangleq$ 13 m in der Länge benötigt.
$x_{2min} = -16$, $x_{2max} = 10 \Rightarrow$ Es werden 26 LE $\triangleq$ 13 m in der Tiefe benötigt.
$\Rightarrow$ Die benötigte Fläche beträgt $A = (13\,m)^2 = 169\,m^2$.

c) Gerade durch den Aufzugsschacht: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Bestimmung des Abstandes Eckpunkt A = (0|0|3) – Aufzug:
E_2: $-x_1 - x_2 + 8x_3 = 24$ ist senkrecht zu g und enthält A.
Einsetzen von g in E_2 liefert $t = \frac{10}{33} \Rightarrow$ Der Schnittpunkt von g und E_2 ist $Q = \left(-\frac{76}{33} \middle| -\frac{76}{33} \middle| \frac{80}{33}\right)$.

Bestimmung des Abstandes von A und Q: $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -\frac{76}{33} \\ -\frac{76}{33} \\ -\frac{19}{33} \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{\frac{361}{33}}$

Der Abstand von A zum Aufzug beträgt $\sqrt{\frac{361}{33}}$ LE $\approx 3{,}31$ LE $\triangleq$ 1,66 m.

Bestimmung des Winkels β zwischen Aufzug und Erdoberfläche (zwischen Gerade und Ebene):
$\sin(\beta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_{0E}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_{0E}|} = \frac{8}{\sqrt{66}} \Rightarrow \beta \approx 79{,}98°$

Bestimmung der Länge des Aufzugsschachtes:
Die Dachebene kann beschrieben werden durch die Gleichung E_3: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 183$.
Einsetzen von g in E_3 liefert $t = \frac{199}{48} \Rightarrow$ Der Schnittpunkt von g und E_3 ist $R = \left(-\frac{295}{48} \middle| -\frac{295}{48} \middle| \frac{199}{6}\right)$

Bestimmung des Abstandes von R und P: $\overrightarrow{PR} = 199 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{\frac{11}{384} \cdot 199^2} \approx 33{,}68$

Die Länge des Schachtes beträgt ca. 33,68 LE $\triangleq$ 16,84 m.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Würfelschnitte (Seite 83)

a) Abfolge der Würfelschnitte:

1	2	3	4	5	6	7	8
VI	I	II	IV	V	VII	VIII	III

Zunächst berührt die Ebene den Würfel im Ursprung (VI). Anschließend entsteht durch Schnitt der drei Kanten, die den Koordinatenachsen entsprechen, ein gleichseitiges Dreieck (I). Dieses wächst immer weiter an, bis die Ebene den Würfel in den drei Eckpunkten $(1|0|0)$, $(0|1|0)$ und $(0|0|1)$ in einem maximal großen gleichseitigen Dreieck (II) schneidet. Dabei entsprechen die Dreiecksseiten den Diagonalen der Quadratflächen. Nun ändert sich beim weiteren Hochwandern der Ebene die Gestalt der Schnittfigur dramatisch: Es entsteht ein Sechseck (IV) und anstatt von drei werden nun sechs der Würfelkanten von der Ebene geschnitten. Sind die Kantenmitten erreicht, entsteht sogar ein regelmäßiges Sechseck (V), das im weiteren Verlauf seine Regelmäßigkeit aber wieder einbüßt (VII), bis der Schnitt der Ebene durch die Eckpunkte $(1|0|1)$, $(1|1|0)$ und $(0|1|1)$ wieder zu einem gleichseitigen Dreieck mit maximaler Ausdehnung führt (VIII). Dieses gleichseitige Dreieck schrumpft im weiteren Verlauf des dynamischen Schnittvorgangs immer weiter zusammen (III), bis schließlich die Ebene den Würfel im Punkt $(1|1|1)$ nur noch berührt.

b) E_A stellt eine Ebenengleichung in Normalenform (NF) dar. Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht dem Vektor der Raumdiagonalen im Würfel. Der Punkt P mit den Koordinaten $(0{,}5|0|1)$ liegt in der Ebene. Über P als Mittelpunkt einer Kante lässt sich die Ebene leicht als die mit der Schnittfigur des regelmäßigen Sechsecks (V) identifizieren.

E_B stellt eine Ebene in Parameterform (PF) dar. $\left(\frac{1}{3}\middle|0\middle|1\right)$ ist Stützpunkt der Ebene. Damit kann die Ebene in Abbildung IV bereits eindeutig identifiziert werden, weil keine zwei Ebenen gemeinsame Kantenschnittpunkte aufweisen. Ein Blick auf die beiden Richtungsvektoren bestätigt dies ebenfalls, denn diese beschreiben einerseits die Kante, die in Abbildung IV auf der Deckelfläche verläuft und andererseits diejenige, die in Abbildung IV in der xz-Ebene verläuft.

E_C schließlich ist eine Ebenengleichung in Koordinatenform (KF). Sie entsteht aus der NF durch Ausmultiplizieren des Skalarproduktes. $(1|1|0)$ liegt auf E_C, dies identifiziert die Ebene als die aus Abbildung VIII.

c) Hier können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Strategien einschlagen:

Strategie A (aufwändig, aber zielführend): Wahl von drei Punkten und erstellen der Parametergleichung über Stützpunkt und Richtungsvektoren.

Strategie B: Durch Abänderung des Ortsvektors in E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ zu $\overrightarrow{OP}$ für einen Punkt P des entsprechenden Würfelschnittes erhält man rasch die geforderten beiden Ebenengleichungen.

Strategie C: Durch Abänderung des Parameters k in E: $x + y + z = k$ gelingt dies ebenso leicht.

Für konkrete Ebenengleichungen siehe d).

d) Alle Schnittebenen sind parallel und haben damit bis auf den Stützvektor dieselbe NF und somit auch bis auf den Parameter k dieselbe KF.
Die Ebene zu Schnittfigur aus Abb. VIII liegt bereits vor ($k = 2$).
Auch bei diesem Aufgabenteil sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich. Am einfachsten ist das Einsetzen eines Punktes des entsprechenden Würfelschnittes in die KF, um k zu bestimmen:
Beispiel zu Abbildung I: $0{,}5 + 0 + 0 = 0{,}5$. Es ergeben sich folgende Ebenengleichungen:

E_I: $x + y + z = 0{,}5$ $\quad$ E_{II}: $x + y + z = 1$

E_{III}: $x + y + z = 2{,}5$ $\quad$ E_{IV}: $x + y + z = 1\frac{1}{3}$

E_V: $x + y + z = 1{,}5$ $\quad$ E_{VI}: $x + y + z = 0$

E_{VII}: $x + y + z = 1\frac{2}{3}$ $\quad$ E_{VIII}: $x + y + z = 2$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

e) Die Ebenen sind parallel zueinander, es reicht den Abstand eines Punktes der zweiten Ebene von der ersten zu ermitteln. Wir wählen $P = (1|0|0)$ mit Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die Ebenengleichung in Hesse'scher NF

E: $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und verwenden diese als Abstandsformel: $d = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Damit dritteln diese beiden Ebenen gerade die Raumdiagonale des Würfels.

Kurven im Raum (Seite 84)

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{32} \approx 5{,}66$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \cos(\gamma) = \frac{16}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{32}} \approx 0{,}32 \Rightarrow \alpha = \gamma \approx 71{,}57°$

$\cos(\beta) = \frac{64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}8 \Rightarrow \beta \approx 36{,}87°$

b) Eine Gleichung in Punkt-Richtungs-Form: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert die Normalenform $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ und damit die Koordinatenform: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$.

d) $\overrightarrow{P(t)} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 + t + t^2 \\ 3{,}5 - 4t + 2t^2 \\ 2 + t - 2t^2 \end{pmatrix}$

Zum Nachweis ist die Koordinatenform der Ebene nützlich:
$2(0{,}25 + t + t^2) + (3{,}5 - 4t + 2t^2) + 2(2 + t - 2t^2) = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$, also liegt jeder Punkt der Kurve in der Ebene.

e) Die x_1-Koordinate lässt sich umformen: $0{,}25 + t + t^2 = (t + 0{,}5)^2 \geq 0$ bedeutet, dass die Kurve vor der x_2x_3-Ebene liegt.

ISBN: 978-3-507-85586-1

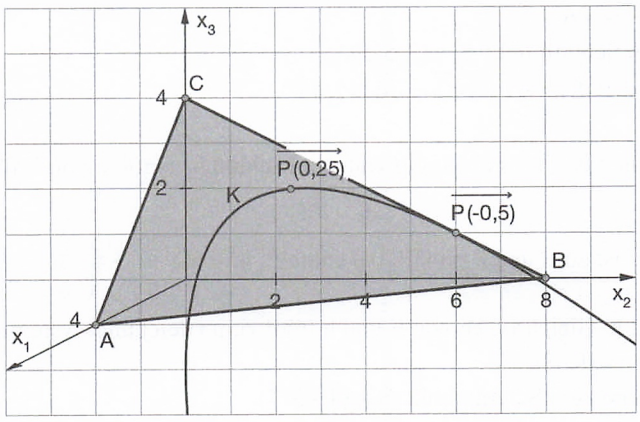
© 2014 Schroedel, Braunschweig

f) Hier sind Kenntnisse aus der Analysis gefragt. Gesucht ist der Wert von t, für den die x_3-Koordinate möglichst groß wird.

$x_3(t) = 2 + t - 2t^2$
$x_3'(t) = 1 - 4t$
$x_3''(t) = -4$
$x_3'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$
$x_3''\left(\frac{1}{4}\right) = -4 \Rightarrow$ Hochpunkt

$\overrightarrow{P(0,25)} = (0{,}5625\,|\,2{,}625\,|\,2{,}125)$ ist der höchste Punkt.
Die x_2x_3-Ebene wird berührt, wenn der x_1-Wert gleich 0 ist.
Aus e) folgt $t = -0{,}5$.

$\overrightarrow{P(-0,5)} = (0\,|\,6\,|\,1)$ ist der Berührpunkt.

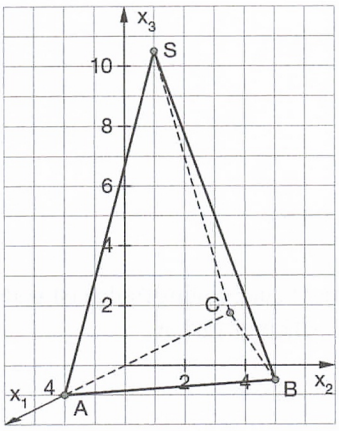


Check up 1 (Seite 85)

1 a) Die Geraden g: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}4\\6\\1{,}5\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\6\\1{,}5\end{pmatrix}$ schneiden sich aus Symmetriegründen in einem Punkt, der jeweils die Länge, Breite und Höhe halbiert. Somit ist $S = (2\,|\,3\,|\,0{,}75)$.
Rechnerisch: Aus dem LGS folgt $r = s = \frac{1}{2}$, also $S = (2\,|\,3\,|\,0{,}75)$.

b) Eine Ebene, die die Punkte A, M und N enthält, ist E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\6\\1{,}5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\6\\1{,}5\end{pmatrix}$.
Da der Ursprung für $r = -1$ und $s = 1$ auf E liegt, ist E die gesuchte Ebene.

2 a)



b) Die Grundfläche liegt in der Ebene:

E: $\frac{1}{\sqrt{1217}}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}12\\-7\\32\end{pmatrix} = 0$

Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes S von der Ebene E:

$d(E, S) = \left|\frac{1}{\sqrt{1217}}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}12\\-7\\32\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{314}{\sqrt{1217}}\right| \approx 9{,}00$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

g und h sind nicht parallel und haben keinen Schnittpunkt.

(1) Bestimmen der Ebene, die h enthält und parallel ist zu g: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) Bestimmen der Geraden, die orthogonal ist zu E und P = (1|3|6) enthält: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

(3) Bestimmen des Schnittpunktes von E und k: Gleichsetzen von E und k führt zum Gleichungssystem
I: $1 + s = 1 + t$; II: $3 + r = 3 + 2t$; III: $2r + s = 6 - t$,
zu den Lösungen $r = 2$, $s = t = 1$ und zum Schnittpunkt $S = (2|5|5)$.

(4) Bestimmen des Abstandes von P und S: $d(P, S) = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

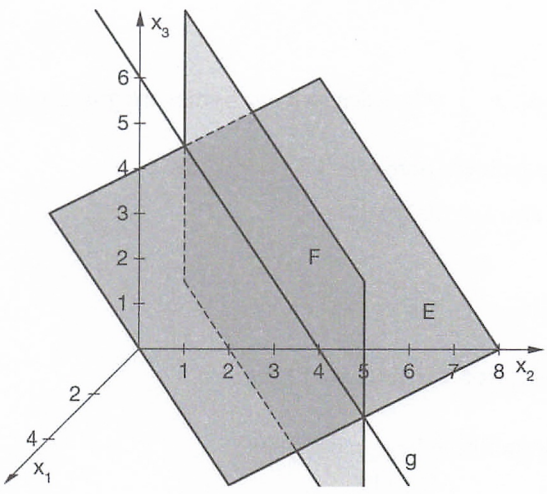
4 g und E sind parallel; der Richtungsvektor von g ist linear abhängig von den Richtungsvektoren von E für $r = 2$ und $s = 1$.

(1) Bestimmen der Geraden h, die orthogonal ist zu E und P = (1|0|10) enthält: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$

(2) Bestimmen des Schnittpunktes von E und h: Gleichsetzen von E und h führt zum Gleichungssystem
I: $1 + r = 1 + 3t$; II: $r - s = -3t$; III: $1 + s = 10 - 3t$,
zu den Lösungen $r = 3$, $s = 6$ und $t = 1$ und zum Schnittpunkt $S = (4|-3|7)$.

(3) Bestimmen des Abstandes von P und S: $d(P, S) = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} \approx 5{,}20$

5 a)



b) Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) Schnittwinkel der Ebenen E und F: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 70{,}53°$

d) Abstand der Schnittgeraden zum Ursprung: Die Ebene, die senkrecht zur Schnittgeraden ist und durch den Ursprung geht, ist E: $x_1 + x_3 = 0$. E wird von s im Punkt (0|4|0) durchstoßen.
Es gilt also $d(s, (0|0|0)) = d((0|4|0), (0|0|0)) = 4$.

6 Das Skalarprodukt ergibt keinen Vektor, sondern eine reelle Zahl: $\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} = 6 + 5 - 8 = 3$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

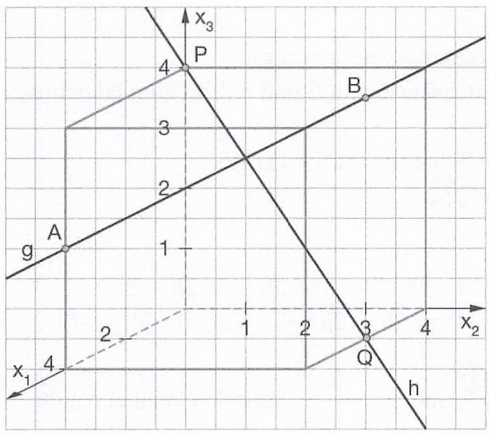
Check up 2 (Seite 86)

1 Da das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}9\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} = 9 + 0 - 9 = 0$ ist, stehen die beiden Geraden orthogonal zueinander.

2 a)/c) Da die Punkte auf einer Geraden liegen, bilden die Punkte keine Ebene.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

3 a)



b) Für die Abstände gilt $d(O, g) \approx 4{,}40$ und $d(O, h) \approx 2{,}98$.

c) $d(g, h) \approx 2{,}20$

4 a) Es wird die Deckfläche des Würfels beschrieben. b) E: $y = 4$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; E: $x + y + z = 10$ d) $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5 Der Winkel zwischen den Geraden g und h ist der Winkel der dazugehörigen Richtungsvektoren. Der Winkel zwischen den Geraden beträgt ca. 109,47° bzw. 180° – 109,47° = 70,53°.

6 Die Ebenen F und G haben den Abstand 3.

Kapiteltest 1 (Seiten 87, 88)

1 a) Der Kosinus des Winkels müsste kleiner 0 sein; also auch das Skalarprodukt der Richtungsvektoren. Dies ist nicht der Fall, da keiner der Vektoren einen Eintrag kleiner 0 enthält.

b) $\alpha = 90°$ c) $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta \approx 54{,}74°$; $\cos(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma \approx 35{,}26°$

2 Normalenvektoren von E_1 und E_2 sind $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt: $\cos(\alpha) = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha \approx 83{,}62°$.

Der gesuchte Winkel ist 83,62°.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 E hat die Darstellung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Die Gerade, die orthogonal zu E ist und P enthält, ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Sie schneidet E für $t = 4$ und $r = s = 0{,}5$ in $S = (0|4|2)$. Aus $d(P, S) = 4$ folgt:
Der Abstand von P zu E beträgt 4.

4 g und h sind parallel, aber nicht identisch (die Aufstützpunkte können nicht beide auf einer Geraden mit dem angegebenen Richtungsvektor liegen).

(1) Bestimmen der Ebene, die orthogonal ist zu g und $P = (1|3|6)$ enthält: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(Beide Richtungsvektoren sind orthogonal zum Richtungsvektor von g).

(2) Bestimmen des Schnittpunktes S von E und h: Gleichsetzen von E und h führt zum Gleichungssystem
I: $1 - s = 1 - 2t_2$; II: $3 + r = 3$; III: $6 + s = 4 - 2t_2$,
zu den Lösungen $r = 0$, $s = -1$, $t_2 = -0{,}5$ und zum Schnittpunkt $S = (2|3|5)$.

(3) Bestimmen des Abstandes von P und S: $d(P, S) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

5 a) Es gilt $S = (0|0|h)$.
Einsetzen der Punkte A, B und S in E_1 ergibt: $2h + 0 = 2h$; $2h + 0 = 2h$; $0 + 2h = 2h$.
Einsetzen der Punkte B, C und S in E_2 ergibt: $-2h - 0 = -2h$; $-2h - 0 = -2h$; $0 - 2h = -2h$.

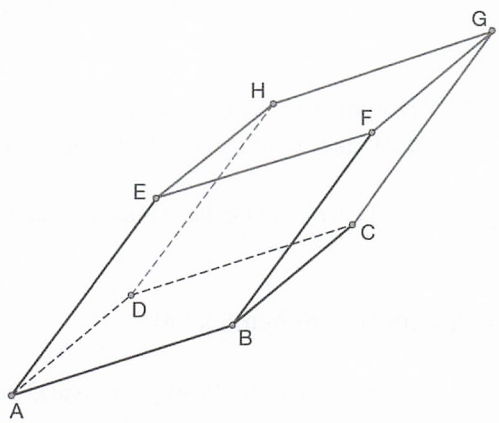
b) Die Normalenvektoren von E_1 und E_2 sind $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}h\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\-h\\-2\end{pmatrix}$. Für den Winkel α gilt:

$\cos(\alpha) = \frac{-4}{h^2+4}$. Daraus folgt: Mit wachsendem h wird $\cos(\alpha)$ größer und α kleiner.

Und $\cos(\alpha)$ ist immer negativ mit $-1 < \cos(\alpha) < 0$; also gilt: $90° < \alpha < 180°$.

6 a) $G = (-8|8|7)$, $H = (-9|2|5)$.

b) Für die Seitenlängen gilt: $d(A, B) = d(D, C) = \sqrt{41}$
und $d(B, C) = d(A, D) = \sqrt{37}$.
Aus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-6\\0\\1\end{pmatrix}$ folgt für den
Winkel $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:
$\cos(\alpha) = \frac{-4}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{37}} \approx -0{,}10 \Rightarrow \alpha \approx 95{,}89°$.
Also beträgt der Winkel β in B ca. 84,11°.



c) A, B und F liegen in E_1, denn es gilt: $0 + 0 + 0 = 0$; $2 - 6 + 4 = 0$ und $-4 - 8 + 12 = 0$.
A, D und E liegen in E_2, denn es gilt: $0 + 0 + 0 = 0$; $-12 + 0 + 12 = 0$ und $-6 - 42 + 48 = 0$.

d) Die Ebenen haben die Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\-21\\12\end{pmatrix}$.

Der Schnittwinkel der Ebenen ergibt sich aus $\cos(\alpha) = \frac{49}{3\cdot\sqrt{589}} \approx 0{,}67$; nämlich $\alpha \approx 47{,}70°$.

7 a) Es gilt: $d(A, C) = \sqrt{30^2+10^2+3^2} = \sqrt{1009} \approx 31{,}76$; $d(B, C) = \sqrt{55^2+40^2+1^2} = \sqrt{4626} \approx 68{,}01$;
$d(B, A) = \sqrt{85^2+50^2+2^2} = \sqrt{9729} \approx 98{,}64$. Die Gesamtlänge der Strecke beträgt ca. 198,41 km.

b) Das Gleichungssystem
I: $160 + 30b + 2c = 300$; II: $500 - 20b + 4c = 300$; III: $280 + 20b + 5c = 300$
ergibt $b = 6$ und $c = -20$. Die Ebene hat die Gleichung $E: 4x + 6y - 20z = 300$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

c_1) L gehört nicht zu E, denn $4 \cdot 95{,}2 - 6 \cdot 9{,}7 \neq 300$.

c_2) Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die L enthält und orthogonal ist zu E. Es gilt g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 95{,}2 \\ -9{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix}$. Jeder Punkt von g hat die Koordinaten

$P = (95{,}2 + 4t \,|\, -9{,}7 + 6t \,|\, -20t)$.

Für $Q \in E$ muss gelten: $4 \cdot (95{,}2 + 4t) + 6 \cdot (-9{,}7 + 6t) - 20 \cdot (-20t) = 300 \Leftrightarrow t = -0{,}05$.

Man erhält den Ebenenpunkt $Q = (95 \,|\, -10 \,|\, 1)$.

c_3) Der Abstand d(L, Q) beträgt $\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 1^2} = \sqrt{1{,}13} \approx 1{,}06$. Dies entspricht 1060 m.

Der Abstand wird eingehalten.

Kapiteltest 2 (Seiten 89, 90)

1 a) Durch einen Punkt und einen Richtungsvektor ist eine Gerade festgelegt. Durchläuft der Parameter t alle reellen Zahlen, so entspricht die Punktmenge der Geraden.

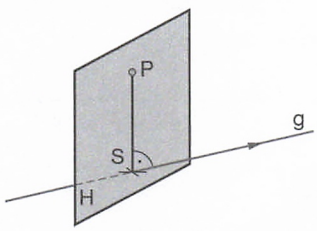
b) z. B. Normalenform der Ebene E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = 0$

Der Richtungsvektor der Geraden g ist Normalenvektor der Ebene, der Ortsvektor ist beliebig.

2 Abstand zweier Punkte P und Q im Raum:
Der Abstand von P und Q entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ mit $d(P, Q) = |\vec{q} - \vec{p}|$.

Abstand eines Punktes P von einer Geraden g im Raum:

Abstand Punkt – Gerade



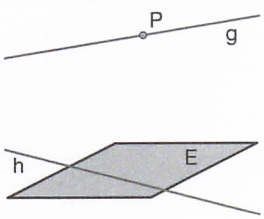
Vorgehen

(1) Hilfsebene H bestimmen, die senkrecht zu g ist und P enthält

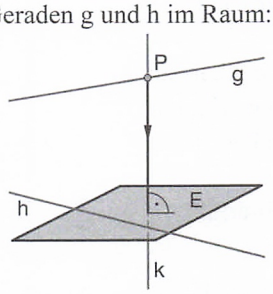
(2) Schnittpunkt S von g und H bestimmen

(3) Abstand der Punkte P und S bestimmen

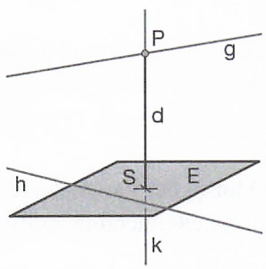
Abstand zweier windschiefer Geraden g und h im Raum:



Ebene E bestimmen, die h enthält und parallel zu g ist. Als Richtungsvektoren von E können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.



Gerade k bestimmen, die senkrecht zu E ist und P enthält.



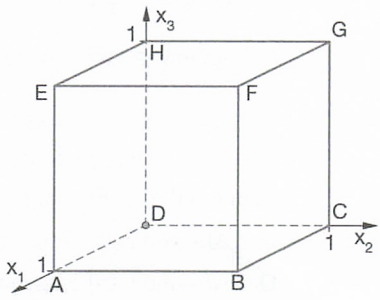
Schnittpunkt S von k und E bestimmen. Abstand der Punkte P und S bestimmen.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Die Beispiele am Einheitswürfel können so geschickt gewählt werden, dass die Rechnung möglichst einfach wird.

Zum Beispiel:
Der Abstand der Punkte E und A ist 1.
Der Abstand des Punktes E von BF ist 1.
Der Abstand des Punktes B von DCGH ist 1.
Der Abstand der Geraden AE von der Geraden DC ist 1.



3 Der Abstand eines beliebigen Punktes G auf der Geraden g vom Punkt P entspricht der Länge des Vektors $\vec{p}-\vec{g}$.

Man erhält eine Funktion, die Länge ist abhängig vom Parameter t:

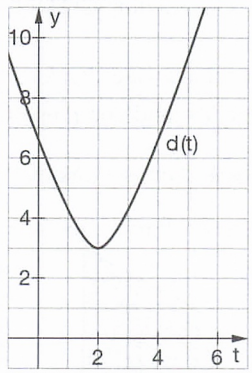
$$d(t)=\sqrt{(2-(2+t))^2+(3-(0+2t))^2+(4-(10-2t))^2}=3\sqrt{t^2-4t+5}$$

Der Abstand ist als minimale Entfernung zweier solcher Punkte definiert. Es muss also das Minimum der Funktion d(t) bestimmt werden.

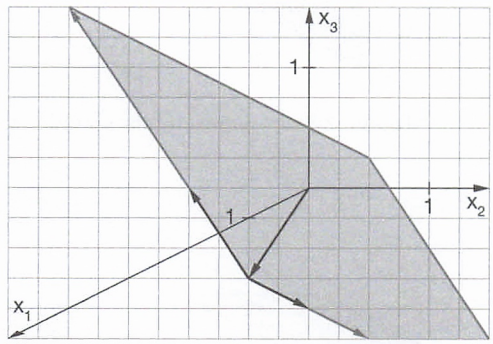
Bestimmung des Minimums von d(t):
Mithilfe der Ableitung:
Minimum der Wurzelfunktion bei Minimum des Radikanden $f(t)=t^2-4t+5$
$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$
$f''(2)=2>0 \Rightarrow$ Minimum
Einsetzen in Abstandsfunktion: $d(2)=3$

In diesem Beispiel ist das Minimum bei $t=2$ erreicht, der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist $d(2)=3$.

Grafisch:



4 a) Skizze mit Punkt und den beiden Richtungsvektoren



b) $E_1 = E_3$: Ausmultiplizieren der Normalenform von E_1 führt zur Koordinatengleichung, die mit der von E_3 identisch ist.
E_1 parallel zu E_2: Der Normalenvektor in der Gleichung zu E_2 ist orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren in der Parameterform zu E_1 (Skalarprodukt jeweils gleich null).
Der Stützvektor in der Parameterform zu E_1 erfüllt nicht die Normalengleichung zu E_2.

c) g_1: Als Richtungsvektor der Geraden einen der Richtungsvektoren von E_1 wählen, als Stützvektor einen Vektor wählen, der die Ebenengleichung nicht erfüllt: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

g_2: Als Richtungsvektor der Geraden den Normalenvektor von E_1 wählen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

d) $d(P, E_2)=\sqrt{3}$

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

5 a) Richtung jeweils über Differenzvektor der beiden Ortsangaben: $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ -10 \end{pmatrix}$

Geschwindigkeiten jeweils über Länge der Richtungsvektoren, Umrechnen für Parameter t in Stunden:
$v_A = 10 \cdot |\vec{v}_A| \approx 224\,\text{km/h}$ $\quad v_B = 10 \cdot |\vec{v}_B| \approx 510\,\text{km/h}$

b) Mit den Daten aus a) ergeben sich die angegebenen Gleichungen für Flugbewegungen (Geraden):
$\overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b(t)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}$

c) Bestimmung der Abstandsfunktion: $\left|\overrightarrow{d(t)}\right| = \left|\overrightarrow{a(t)} - \overrightarrow{b(t)}\right| = \sqrt{410000t^2 - 6200t + 26} = d(t)$

Bestimmung des Minimums über Ableitung des Radikanden oder grafisch (vergleiche Lösung zu Aufgabe 3): $t_{min} = \frac{31}{4100} \approx 0{,}00756$

Die beiden Flugzeuge kommen sich also nach ca. 0,45 min = 27 s am nächsten. Flugzeug A befindet sich zu diesem Zeitpunkt im Punkt $\left(\frac{62}{41} \middle| \frac{133}{41} \middle| 2\right)$, Flugzeug B im Punkt $\left(3 \middle| \frac{155}{41} \middle| \frac{92}{41}\right)$.

Einsetzen in Abstandsfunktion: $d_{min} = \sqrt{\frac{105}{41}} \approx 1{,}60$

Der geringste Abstand beträgt ca. 1,6 km, der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Kapiteltest 3 (Seiten 91, 92)

1 a) Einsetzen der Punkte in die Gleichung liefert keinen Widerspruch und A, B, C liegen nicht auf einer Geraden.

b) Lotgerade ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Einsetzen in die Ebenengleichung liefert:

$(1 + t) + 2(2t) + 2(2 + 2t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF} = \vec{f} - \vec{d} = -\frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{DF}| = \frac{5}{3}$. Der Punkt D hat die Entfernung $\frac{5}{3}$ zur Ebene E.

2 a) (A) Falsch, Gegenbeispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 1$

(B) Falsch, das Skalarprodukt ist auch dann null, wenn die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.
(C) Wahr, denn $\vec{0} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{0} = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
(D) Wahr, denn $0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$, $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$ und wenn $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $r \neq 0$, dann ist $r \cdot \vec{b} \neq \vec{0}$.

b) (A) Falsch, die Ebenen können auch parallel sein.
(B) Wahr, wenn $E_1 = E_2$ gilt, muss $\vec{n}$ Normalenvektor auf E_1 sein; damit gilt $\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$.
(C) Wahr, der Richtungsvektor muss kollinear zu $\vec{n}$ sein, damit die Gerade senkrecht auf E_2 ist. Also folgt $g \perp E_2$.
(D) Wahr, $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\vec{x} - \vec{d}) = 0$ ist Hesse'sche Normalenform der Ebene E_2, für den Abstand $d(Q, E_2)$ gilt $d(Q, E_2) = 3 \Rightarrow Q \notin E_2$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 Koordinaten der Punkte: A = (0|0|0), B = (6|0|0), C = (6|5|0), D = (0|5|0), E = (0|0|4), F = (6|0|4), G = (6|5|4), H = (0|5|4), K = (0|2,5|4), M = (0|5|2)

a) Parametergleichung der Ebene U: $\vec{x} = \vec{f} + r(\vec{c} - \vec{f}) + s(\vec{m} - \vec{f}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) K erfüllt die Ebenengleichung für r = –0,5 und s = 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Gleichung der Geraden AG: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von AG mit Ebene U durch Gleichsetzen: $t\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{3}{5}, r = \frac{1}{5}, s = \frac{2}{5}$

Einsetzen von $t = \frac{3}{5}$ in Geradengleichung AG liefert den Schnittpunkt $S = \left(\frac{18}{5} \middle| 3 \middle| \frac{12}{5}\right)$.

Diagonalenschnittpunkt T von FM und CK:

FM: $\vec{x} = \vec{f} + r(\vec{m} - \vec{f}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ CK: $\vec{x} = \vec{c} + s(\vec{k} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ -2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen und Lösung des Gleichungssystems: $r = s = \frac{2}{3}$

Einsetzen in eine der Geradengleichungen liefert Schnittpunkt $T = \left(2 \middle| \frac{10}{3} \middle| \frac{8}{3}\right)$.

S und T stimmen nicht überein.

d) Bedingung für Orthogonalität: Das Skalarprodukt des Richtungsvektors von AG mit jedem Richtungsvektor der Ebene U muss null sein.

Es gilt $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \neq 0$. Die Raumdiagonale AG ist nicht orthogonal zur Ebene U.

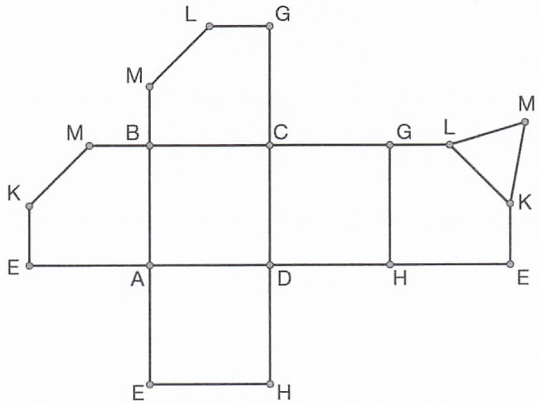
e) $\overrightarrow{FC} = \vec{c} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KM} = \vec{m} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$; die beiden Vektoren sind kollinear.

$\overrightarrow{FK} = \vec{k} - \vec{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} |\overrightarrow{FK}| = \sqrt{36 + 6,25 + 0} \\ |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{36 + 0 + 4} \end{array} \Rightarrow |\overrightarrow{FK}| \neq |\overrightarrow{CM}|$

Geometrische Bedeutung: Das Viereck FCMK ist ein nicht gleichschenkliges Trapez.

4 Koordinaten der Punkte: A = (0|0|0), B = (4|0|0), C = (4|4|0), D = (0|4|0), E = (0|0|4), F = (4|0|4), G = (4|4|4), H = (0|4|4), K = (2|0|4), L = (4|2|4), M = (4|0|2)

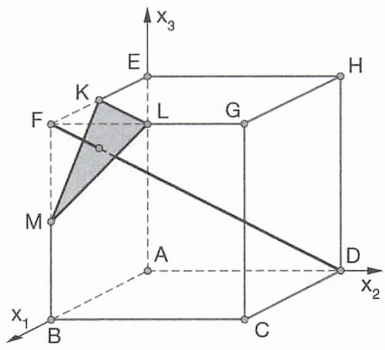
a) Netz des Körpers



ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Ebene E durch K, L, M: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



Würfeldiagonale DF: $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt von $\overrightarrow{DF}$ mit jedem Richtungsvektor von E ist null, also steht DF senkrecht auf E.

c) Geradengleichung für Würfeldiagonale DF aufstellen. Gleichsetzen von E und DF, Gleichungssystem aufstellen und lösen, passende Lösungen (Parameter) in Geradengleichung einsetzen, daraus ergibt sich der Schnittpunkt S.

5 a) Parametergleichung für die Ebene ABE: $\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{e} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenform der Ebene ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$. Der Abstand des Punktes P = (2|3|10) von dieser Ebene ist 1.

b) Parametergleichung der Geraden BH: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Hilfsebene E, die senkrecht zu BH ist und den Punkt F enthält:

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ oder E: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

Schnittpunkt der Geraden BH und Hilfsebene E: $(1 + t) + (1 + t) - (-t) = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = \left(\frac{2}{3} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{1}{3}\right)$

Der Abstand $d(F, S) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ liefert dann den Abstand des Punktes F von der Geraden BH.

6 a) $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{k}| = 9$

Die gradlinige Bewegung der Flugzeuge lässt sich in Parametergleichungen beschreiben, wobei t der Parameter für die Zeit (in Stunden) ist.

Flugzeug A: $\overrightarrow{g(t)} = 100t \cdot \vec{v}$ Flugzeug B: $\overrightarrow{h(t)} = \begin{pmatrix} -20 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} + 100t \cdot \vec{k}$

Abstandsvektor zum Zeitpunkt t: $\overrightarrow{d(t)} = \overrightarrow{g(t)} - \overrightarrow{h(t)}$

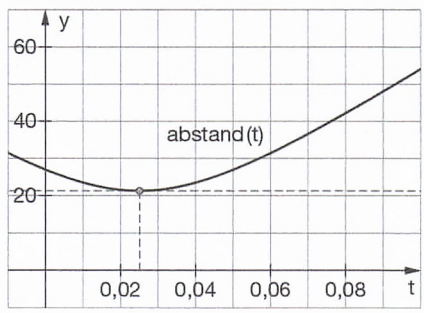
abstand(t) = $\left|\overrightarrow{d(t)}\right| = 5\sqrt{17\,600t^2 - 880t + 29}$

Bestimmung von Minimum abstand(t) im gegebenen Zeitintervall:
Mithilfe der Ableitung:
Minimum der Wurzelfunktion bei Minimum des Radikanden

$f(t) = 17\,600t^2 - 880t + 29 \Rightarrow t_{min} = \frac{1}{40}$ (in h)

Minimaler Abstand nach 90 Sekunden.
Einsetzen in Abstandsfunktion: $d_{min} \approx 21{,}2\,km$
Der Mindestabstand wird eingehalten.

Grafisch:



Die Positionen der Flugzeuge zum Zeitpunkt $t_{min} = \frac{1}{40}$:

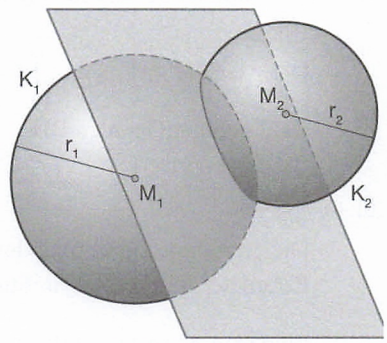
$g(t_{min}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $h(t_{min}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

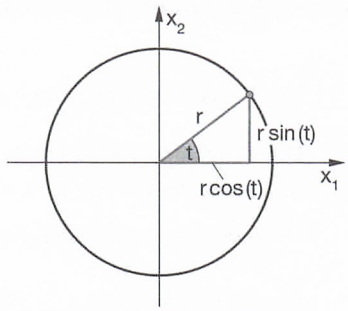
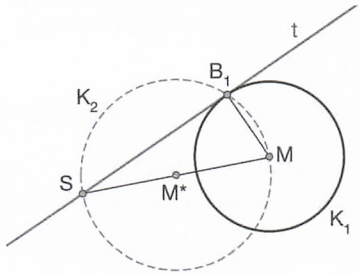
b) abstand(0) ≈ 26,93 km; abstand(0,05) ≈ 26,93 km

c) Der Abstand der Flugrouten ist der Abstand der beiden windschiefen Geraden. Der minimale Abstand der Flugzeuge ist vom Zeitpunkt abhängig. Die Flugzeuge müssten sich zum Zeitpunkt t_{min} gerade in den Fußpunkten des gemeinsamen Lotes der windschiefen Geraden befinden, damit die beiden Minima übereinstimmen. Dies ist nicht der Fall.

Kreise und Kugeln – Übersicht (Seite 94)

Kreis	Ein Kreis ist durch den Mittelpunkt und den Radius festgelegt.
Lagebeziehungen von Kreisen	Zwei Kreise können sich in zwei Punkten schneiden, sich in einem Punkt berühren oder keinen Schnittpunkt haben. Dabei können die Kreise auch ineinander liegen.
Lagebeziehungen von Kreis und Gerade	Die Gerade ist eine Passante: Gerade und Kreis haben keinen Schnittpunkt. Die Gerade ist eine Tangente: Gerade und Kreis haben einen Berührpunkt. Die Gerade ist eine Sekante: Gerade und Kreis haben zwei Schnittpunkte.
Kreis im Ursprung	K(O, r): $\lvert\vec{x}\rvert = r$ oder K(O, r): $x_1^2 + x_2^2 = r^2$
Lagebeziehungen von Punkt und Kugel	Wenn der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt dem Radius entspricht, dann liegt der Punkt auf der Kugeloberfläche.
Lagebeziehungen von Ebene und Kugel	Ebene und Kugel können keinen Schnittpunkt, einen Berührpunkt oder einen Schnittkreis haben.
Lagebeziehungen von Kugeln	Zwei Kugeln können sich in einem Schnittkreis schneiden, sich berühren oder keinen Schnittpunkt haben. Dabei können die Kugeln auch ineinander liegen.
Kugel	Eine Kugel ist durch den Mittelpunkt und den Radius festgelegt.
Punktprobe	Ein Punkt liegt außerhalb einer Kugel, wenn der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt größer als der Radius ist.
Schnittkreis von Kugeln	Den Schnittkreis zweier Kugeln bilden die gemeinsamen Punkte der beiden Kugeln. 
Tangentialebene	$\vec{b}-\vec{m}$ und $\vec{x}-\vec{b}$ stehen senkrecht zueinander.
Gleichungen von Tangenten und Tangentialebenen	Die Gleichungen unterscheiden sich in der Koordinatenschreibweise nur in der Anzahl der Koordinaten; Tangente: zwei Koordinaten, Tangentialebene: drei Koordinaten.
Weitere Tangentialebene	T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot((\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m}))=0$, da $(\vec{x}-\vec{b})=(\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})$ T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{b}-\vec{m})=0$ T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{m})-r^2=0$, da $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{b}-\vec{m})=r^2$ T: $(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{m})=r^2$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Parameterdarstellung eines Kreises	Mithilfe der trigonometrischen Funktionen lassen sich Kreise, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, durch Parametergleichungen beschreiben: $x_1(t) = r \cdot \cos(t)$ und $x_2(t) = r \cdot \sin(t)$ mit $0 \le t \le 2\pi$ 
Tangente an einen Kreis	Man konstruiert den Mittelpunkt M* der Strecke $\overline{MS}$ und schlägt einen Kreis K_2 mit dem Radius $\lvert MM^*\rvert$ um den Punkt M*. Dieser Kreis dient als Thaleskreis. Der Schnittpunkt von K_1 und K_2 ist B_1. Nach dem Satz des Thales sind die Strecken $\overline{MB_1}$ und $\overline{B_1S}$ orthogonal. Die Strecke $\overline{MB_1}$ ist ein Radius des Kreises K_1, die Gerade B_1S ist die gesuchte Tangente t. 

Kreis- und Kugelgleichungen (Seite 95)

1 a – K_2; b – K_4; c – K_1; d – K_3

2 Die Kugel K((2|1|–3), 3) wird beschrieben durch die Gleichungen in (B), (C) und (D).

3 A liegt außerhalb der Kugel, da $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} > r = 7$.

B liegt auf der Kugel, da $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{9+36+4} = 7 = r$.

C liegt innerhalb der Kugel, da $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30} < r = 7$.

4 a) K: $\vec{x}^2 = 12$ b) Da $\left|\overrightarrow{OP}\right| = r = 13$, ist K: $\vec{x}^2 = 169$.

c) Da der Radius 2 ist, gilt K: $\vec{x}^2 = 4$.

5 Die Geraden schneiden sich im Punkt P = (1|2|3), dies ist der Berührpunkt der Kugeln.
Die Mittelpunkte der Kugeln erhält man durch Abtragen der Streckenlänge 15 in Richtung

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\vec{n}\right| = \sqrt{100+100+25} = \sqrt{225} = 15.$$

Für die Mittelpunkte gilt:

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Somit sind $M_1 = (-9|-8|-2)$ und $M_2 = (11|12|8)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kreise, Kugeln und Geraden (Seite 96)

1 Der Kreis K hat den Mittelpunkt (–3|–4) und den Radius 5. Die Gleichung lautet $K: \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right)^2 = 25$.

Die Tangenten verlaufen parallel zur x-Achse bzw. parallel zur y-Achse:
$t_1: x = -8$; $t_2: y = -9$; $t_3: x = 2$; $t_4: y = 1$.

Die Gerade g berührt den Kreis im Punkt $P = (-7|-1)$; ihre Gleichung lautet z. B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ist orthogonal zum Vektor $\vec{p}-\vec{m} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, der vom Mittelpunkt $M = (-3|-4)$ zum Berührpunkt $P = (-7|-1)$ zeigt.

2 Wir setzen die Geradengleichung in die Kreisgleichung ein: $(x_1 - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 - 1\right)^2 = 6{,}25$; dies ergibt die quadratische Gleichung $x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$ mit den Lösungen $x_{11} = 1$ oder $x_{12} = 3$.
Durch Einsetzen dieser Lösungen in die Geradengleichung erhält man als gemeinsame Punkte:
$P_1 = \left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$ und $P_2 = \left(3\middle|-\frac{1}{2}\right)$.

3 (1) Mittelpunkt M′ der Strecke $\overline{MP}$ bestimmen: $M' = \left(\frac{3}{2}\middle|\frac{5}{2}\right)$

(2) Thaleskreis K′ um M′ mit Radius $r = |\overline{MM'}|$ bestimmen: $K': \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

(3) Schnittpunkte B_1 und B_2 von K und K′ bestimmen:
$B_1 = \left(\frac{1}{13}\left(42-\sqrt{22}\right)\middle|\frac{1}{13}\left(37+5\sqrt{22}\right)\right) \approx (2{,}87|4{,}65)$; $B_2 = \left(\frac{1}{13}\left(42+\sqrt{22}\right)\middle|\frac{1}{13}\left(37-5\sqrt{22}\right)\right) \approx (3{,}59|1{,}04)$

(4) Tangentengleichungen aufstellen:
$t_1: \left(-\frac{10}{13}-\frac{1}{13}\sqrt{22}\right)x_1 + \left(-\frac{2}{13}+\frac{5}{13}\sqrt{22}\right)x_2 = \frac{6}{13}+\frac{11}{13}\sqrt{22}$
$t_2: \left(-\frac{10}{13}+\frac{1}{13}\sqrt{22}\right)x_1 + \left(-\frac{2}{13}-\frac{5}{13}\sqrt{22}\right)x_2 = \frac{6}{13}-\frac{11}{13}\sqrt{22}$

4 Die Kugel hat die Gleichung $K: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$.
Durch Einsetzen der Parametergleichung der Geraden in die Kugelgleichung erhält man:
$((1 + 2t) - 1)^2 + ((1 + t) - 2)^2 + ((1 + 2t) - 2)^2 = 9$, also $4t^2 + (t - 1)^2 + (2t - 1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 6t - 7 = 0$.
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $t_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$ und $t_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Somit gibt es zwei Schnittpunkte $\Rightarrow$ g ist eine Sekante an K.

5 Die Gerade durch P und Q wird beschrieben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\0\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix}$.

Die Hilfsebene $H: 9x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ist senkrecht zu g und geht durch den Ursprung.
Der Schnittpunkt von g und H ist $S = (2|6|9)$.
Dieser Schnittpunkt ist der Berührpunkt der Kugel K mit der Geraden durch P und Q.
$|\overrightarrow{OS}| = r = \sqrt{4 + 36 + 81} = 11 \Rightarrow K: \vec{x}^2 = 121$

6 Die Kugelmittelpunkte erhält man als Schnitt von g mit den Ebenen F_+ und F_-, die von E den Abstand des Radius 22 haben.

HNF von E: $\frac{1}{11}(6x_1 + 9x_2 + 2x_3) - 1 = 0$

HNF für F_+ und F_-: $F_+: \frac{1}{11}(6x_1 + 9x_2 + 2x_3) - 1 + 22 = 0$ und $F_-: \frac{1}{11}(6x_1 + 9x_2 + 2x_3) - 1 - 22 = 0$

F_+ schneidet g für $t = -4$ in $M_1 = (-13|-19|9)$; F_- schneidet g für $t = -2$ in $M_2 = (13|21|-7)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Für die Berührpunkte gilt:

$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OM_1} + 22\overrightarrow{n_{0,E}} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -13 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$, also $B_1 = (-1|-1|13)$.

$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OM_2} - 22\overrightarrow{n_{0,E}} = \overrightarrow{OM_2} - 2\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, also $B_2 = (1|3|-11)$.

M ist der Schnittpunkt von g und E $\Rightarrow$ für $t = -3$ folgt $M = (0|1|1)$.

Kugeln und Ebenen (Seite 97)

1 a) Die Gerade h: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft durch den Ursprung und steht senkrecht zur Ebene E.

Der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene E ist der Berührpunkt der Kugel mit der Ebene $\Rightarrow$ $B = (3|2|6)$. Der Abstand $d(O,B) = \sqrt{9+4+36} = 7$ ist der Radius der Kugel $\Rightarrow$ K: $\vec{x}^2 = 49$.

b) Die Gerade h: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft durch den Ursprung und steht senkrecht zur Ebene F.

Der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene F ist der Berührpunkt der Kugel mit der Ebene $\Rightarrow$ $B = \left(\frac{4}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\right)$. Der Abstand $d(O,B) = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{64}{9}} = 4$ ist der Radius der Kugel $\Rightarrow$ K: $\vec{x}^2 = 16$.

2 Der Berührpunkt liegt auf E und hat damit die Koordinaten $B = (4|3|5)$.
Kugeln, die B berühren, haben ihren Mittelpunkt auf der senkrechten Geraden h durch den Berührpunkt B, also auf h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Jeder Punkt auf h ist Mittelpunkt einer Kugel, die B berührt. Gesucht ist nun eine Kugel, deren Mittelpunkt M auf F liegt. M ist somit der Schnittpunkt von h und F, es gilt $M = (2|2|2)$ ($t = -1$ in h eingesetzt).

Der Abstand $d(M,B) = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ ist der Radius der Kugel.

Die gesuchte Kugelgleichung lautet K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)^2 = 14$.

3 a) Die Kugelgleichung beschreibt eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (m_1|m_2|m_3) = (-4|-7|-4)$ und Radius $r = 9$. Da die Koordinaten alle vom Betrag kleiner als der Radius $r = 9$ sind, schneidet die Kugel die drei Koordinatenebenen.

b) Um den Schnittkreis mit der x_1x_2-Ebene zu bestimmen, setzen wir in der Koordinatengleichung der Kugel $x_3 = 0$. Als Mittelpunkt ergibt sich dadurch $M' = (-4|-7|0)$.
Der Radius r' wird berechnet mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen r', m_3 und r durch $r' = \sqrt{r^2 - m_3^2} = \sqrt{9^2 - (-4)^2} = \sqrt{65}$.

c) Schnittkreis mit der x_1x_2-Ebene: $(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 7)^2 = 65$ mit Mittelpunkt $M' = (-4|-7|0)$ und Radius $r' = \sqrt{r^2 - m_3^2} = \sqrt{9^2 - (-4)^2} = \sqrt{65}$ (siehe Teil b))
Schnittkreis mit der x_1x_3-Ebene: $(x_1 + 4)^2 + (x_3 + 4)^2 = 32$ mit Mittelpunkt $M' = (-4|0|-4)$ und Radius $r' = \sqrt{r^2 - m_2^2} = \sqrt{9^2 - (-7)^2} = \sqrt{32}$
Schnittkreis mit der x_2x_3-Ebene: $(x_2 + 7)^2 + (x_3 + 4)^2 = 65$ mit Mittelpunkt $M' = (0|-7|-4)$ und Radius $r' = \sqrt{r^2 - m_1^2} = \sqrt{9^2 - (-4)^2} = \sqrt{65}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

4 (1) Einen Normalenvektor von E bestimmen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

(2) Eine zu E senkrechte Gerade h durch den Mittelpunkt M der Kugel K bestimmen: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) T_1 und T_2 sind die Schnittpunkte von h und K: $T_1 = (1|3|1)$ und $T_2 = (3|-1|5)$

(4) Die Tangentialebenen F_1 bzw. F_2 durch T_1 bzw. T_2 sind beide parallel zu E, d. h. sie haben den gleichen Normalenvektor wie E:

F_1: $(\vec{x} - \vec{t}_1) \cdot \vec{n} = 0$ und F_2: $(\vec{x} - \vec{t}_2) \cdot \vec{n} = 0$

F_1: $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$ und F_2: $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

Verschiedenes zu Kreisen und Kugeln (Seite 98)

1 a) Die Mittelpunkte liegen auf dem Strahl g: $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t > 0$; der Abstand zu den Koordinatenebenen ist dann jeweils gleich.

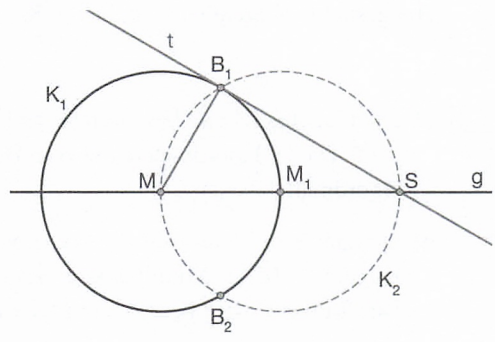
b) K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 1$, da der Abstand von $M = (1|1|1)$ zu den Koordinatenebenen sich durch die Abstände von M zu den Punkten $(1|1|0)$, $(1|0|1)$ und $(0|1|1)$ ergibt. Diese Abstände sind jeweils 1.

2 a) Die Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = (5|-3)$ und Radius $r = \sqrt{34}$.

b) Im dreidimensionalen Raum beschreibt die Gleichung einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius $r = \sqrt{34}$, dessen Achse parallel zur x_3-Achse durch den Punkt $(5|-3|0)$ verläuft. Da die x_3-Koordinate in der Gleichung nicht vorkommt, kann sie im dreidimensionalen Raum jeden beliebigen Wert unabhängig von den beiden anderen Koordinaten annehmen.

3 Die Gerade ist eine Tangente an den Kreis. Subtrahiert man die Ortsvektoren von Berührpunkt und Kreismittelpunkt, dann ist dieser Vektor orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden.

4 Man konstruiert den Mittelpunkt M_1 der Strecke $\overline{MS}$ und schlägt einen Kreis K_2 mit dem Radius $|\overline{MM_1}|$ um den Punkt M_1. Dieser Kreis dient als Thaleskreis.
Ein Schnittpunkt von K_1 und K_2 ist B_1. Nach dem Satz des Thales sind die Strecken $\overline{MB_1}$ und $\overline{B_1S}$ orthogonal. Die Strecke $\overline{MB_1}$ ist der Radius des Kreises K_1, die Gerade B_1S ist die gesuchte Tangente t. Der Punkt B_2 ist eine weiterer Berührpunkt. Es gibt genau diese zwei Berührpunkte.



5 Konzentrische Kugeln haben denselben Mittelpunkt, aber unterschiedliche Radien.

Für die Kugelgleichungen gilt: K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = r^2$ mit $r \neq 2$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 $\overrightarrow{OM_a} = \begin{pmatrix} 3a \\ 4a \\ 12a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $a > 0$ ist Teil einer Geraden durch den Ursprung mit Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Die Scharkugeln haben eine gemeinsame Tangentialebene im Ursprung, da die Vektoren $\overrightarrow{OM_a}$, also die Normalenvektoren der Tangentialebenen, parallel zueinander sind.
Die Tangentialebene lautet T: $3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0$.

Multiple Choice (Seite 99)

a) (C) b) (A) und (D) sind Kreisgleichungen; (B) ist eine Kugelgleichung.

c) (C) Die beiden Kugeln haben einen Schnittkreis; nur die Bedingung $|\overrightarrow{M_1M_2}| < r_1 + r_2$ reicht nicht, da die Kugeln auch ineinander liegen könnten.
(A) K_1 liegt in K_2, da M_2 auf K_1 liegt und $r_2 > 2r_1$ gilt.
(B) Die beiden Kugeln berühren sich.
(D) Die Kugeln haben keine gemeinsamen Punkte.

d) (A) Falsch, da die Kugeln auch „nebeneinander" liegen können.
(B) Wahr, es ist eine Kugel mit Mittelpunkt M = (2|1|–2) und Radius 1.
(C) Wahr, denn zu jeder Geraden gibt es eine Kugel, sodass sie eine Kugeltangente ist.
(D) Wahr.
(E) Falsch, die Gerade muss zusätzlich senkrecht zur Tangentialebene stehen.
(F) Falsch, durch drei Punkte ist ein Kreis eindeutig festlegt; dieser Kreis kann Schnittkreis unterschiedlich großer Kugeln sein.
(G) Wahr, jede Gerade durch den Kugelmittelpunkt ist eine Sekante.

Wetterballone (Seite 100)

1 a) Das Flugzeug bewegt sich auf der Geraden AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 100 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die kürzeste Entfernung zum Wetterballon hat das Flugzeug im Schnittpunkt der Geraden g mit einer Ebene E, die senkrecht zu g ist und durch M verläuft.

$\Rightarrow$ E: $\begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \right) = 0$, also E: $40x_1 - 60x_2 + x_3 = -3035{,}2$

Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene erhält man:
$40(-30 + 40t) - 60(100 - 60t) + 4 + t = -3035{,}2 \Rightarrow 5201t = 4160{,}8 \Rightarrow t = 0{,}8$
Der Schnittpunkt ist somit S = (2|52|4,8).
Der kürzeste Abstand des Flugzeuges zum Wetterballon ist damit

$$d(S,M) = |\overrightarrow{SM}| = \left| \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{325} \approx 18{,}03 > 18.$$

Das Flugzeug ist folglich immer mehr als 18 km vom Ballonmittelpunkt entfernt.

b) Als Kugelgleichung erhält man mit r = 9 dann K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \right)^2 = 81$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

c) Der Warnton ertönt im Schnittpunkt P der Geraden CM mit der Kugel um den Ballonmittelpunkt und dem Radius r = 9.

CM: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 76 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Kugelgleichung erhält man:

$$\left(\begin{pmatrix} 18-t \\ 76-14t \\ 2{,}8+2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \right)^2 = 81 \Rightarrow (1-t)^2 + (14-14t)^2 + (-2+2t)^2 = 81 \Rightarrow 201t^2 - 402t + 201 = 81$$

$$\Rightarrow t_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{120}{201}} \approx 1{,}6348 \text{ und } t_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{120}{201}} \approx 0{,}3652$$

Der Warnton ertönt erstmals für $t_2 \approx 0{,}3652$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} \approx \begin{pmatrix} 18 \\ 76 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} + 0{,}3652 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 17{,}63 \\ 70{,}89 \\ 3{,}53 \end{pmatrix}$$

Der Punkt, in dem der Warnton erstmals ertönt, ist P ≈ (17,63|70,89|3,53).

2 a) Es müssen dazu die Schnittpunkte der Geraden g mit der Ebene E bestimmt werden.
Einsetzen von g in E liefert: $-5{,}5\,(4 - 0{,}8t) + 5{,}5\,(4 - 2{,}25t) - 1{,}15\,(3 + 5{,}5t) + 3872 = 0$
$\Rightarrow t \approx 270{,}53$, also Schnitt von Gerade und Ebene.
Für die Höhe h des Schnittpunktes gilt: $h = 3 + 5{,}5t \approx 1490{,}90$.
Da der Berg nur 932 m hoch ist, schneidet die Gerade g den Teil der Ebene E, der den Berghang darstellt, nicht.

b) Für den Abstand d(g, G) wird eine zur Geraden g senkrechte Ebene H, die G enthält, aufgestellt mit

$$H: \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}25 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ -882 \\ 932 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow H: -0{,}8x_1 - 2{,}25x_2 + 5{,}5x_3 - 7096{,}9 = 0.$$

Der Schnittpunkt S der Ebene H mit der Geraden g ergibt sich durch Einsetzen von g in H:
$-0{,}8\,(4 - 0{,}8t) - 2{,}25\,(4 - 2{,}25t) + 5{,}5\,(3 + 5{,}5t) - 7096{,}9 = 0 \Rightarrow t \approx 197{,}28$.
Der Schnittpunkt ist somit S ≈ (–153,82|–439,88|1088,04).

$$d(g,G) = d(S,G) \approx \left| \begin{pmatrix} -153{,}82 \\ -439{,}88 \\ 1088{,}04 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ -882 \\ 932 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -170{,}82 \\ 442{,}12 \\ 156{,}04 \end{pmatrix} \right| \approx 499 \text{ und somit ca. } 500\,\text{m}.$$

c) Für die Gleichung der Kugel gilt $K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -154 \\ -440 \\ 1089 \end{pmatrix} \right)^2 = 1.$

Der Punkt P, der der Kugeloberfläche am nächsten ist, lässt sich als Schnittpunkt der Kugel mit der Geraden durch M und G ermitteln.
Möglich ist die Bestimmung des Punktes P auch, da der Radius der Kugel 1 ist, mithilfe des Weges über einen Streckenzug: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{|\overrightarrow{MG}|} \cdot \overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} -154 \\ -440 \\ 1089 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{171^2 + (-442)^2 + (-157)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 171 \\ -442 \\ -157 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -153{,}7 \\ -440{,}9 \\ 1088{,}7 \end{pmatrix}$

Für den Punkt P gilt: P ≈ (–153,7|–440,9|1088,7).

Globus und Bewegungsmelder (Seite 101)

1 a) Als Kugelgleichung erhält man mit $r = \frac{d}{2} = 2{,}05$ dann $K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} \right)^2 = 2{,}05^2.$

Da sich der Mittelpunkt des Globus 2,8 m über dem Erdboden befindet und der Radius 2,05 m beträgt, befindet sich der unterste Punkt des Globus in 2,8 m – 2,05 m = 0,75 m über dem Erdboden.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Die Geradengleichung durch N und M lautet $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}84 \\ 1{,}87 \end{pmatrix}$.

Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$ setzen):

$2{,}8 + 1{,}87t = 0 \Rightarrow t \approx -1{,}5$

$\Rightarrow \overrightarrow{OZ} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} - 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}84 \\ 1{,}87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}66 \\ 0 \end{pmatrix}$; also $Z \approx (5 \mid 5{,}66 \mid 0)$.

c) Die senkrechte Richtung kann durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Für den Winkel zwischen dieser Richtung und der Richtung der Drehachse gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}84 \\ 1{,}87 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{4{,}2025}} = \dfrac{1{,}87}{2{,}05} \approx 0{,}912$.

Somit ist die Drehachse um ca. 24,2° gegenüber der Senkrechten geneigt.

d) Der Richtungsvektor der Geraden g, auf der die Drehachse liegt, ist ein Normalenvektor der Äquatorialebene E; der Mittelpunkt der Kugel K liegt in dieser Ebene.

$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}84 \\ 1{,}87 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} \right) = 0$; also $E: -0{,}84x_2 + 1{,}87\,x_3 = 1{,}54$.

2 Die Gleichung der Kugel, innerhalb der der Bewegungsmelder wirkt, ist $K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^2 = 6{,}25$.

Der Kopf des Einbrechers auf dem Weg durch den Raum von der Tür T zur Vitrine V wird durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Die gemeinsamen Punkte der Geraden mit der Kugel werden durch Einsetzen von g in die Kugelgleichung K bestimmt: $\left(\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = 6{,}25$

$\Rightarrow 109t^2 - 109t + 25 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{109}} \approx 0{,}36$ und $t_2 = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{109}} \approx 0{,}64$

Aufgrund der Modellierung muss der kleinere der Parameter gewählt werden; t_1 führt also zum Schnittpunkt S, bei dem der Einbrecher erstmals in den Erfassungsbereich des Bewegungsmelders tritt:

$\overrightarrow{OS} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}36 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}1 \\ 3{,}6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Länge der Wegstrecke, die der Einbrecher im Raum, ohne vom Bewegungsmelder erfasst zu werden, zurücklegen kann, ist damit $\left| 0{,}36 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \approx \left| \begin{pmatrix} 1{,}08 \\ 3{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \approx 3{,}76\,\text{m}$.

Check up (Seite 102)

1 a) Der Kreis K hat den Mittelpunkt (–2|3) und den Radius r = 5. Man kann den Radius ausnutzen und vom Mittelpunkt aus z. B. 5 LE nach oben, unten, rechts oder links gehen. Man kann aber auch ausnutzen, dass $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist und 3 LE nach oben, unten, rechts oder links und zugleich 4 LE orthogonal dazu gehen. Auf K liegen z. B. die Punkte (3|3), (–7|3), (–2|8), (–2|–2), (1|7), (1|–1).

b) Auf der Kugel K liegen z. B. die Punkte (13|3|1), (–2|18|1) und (–2|3|16). Man geht vom Mittelpunkt (–2|3|1) aus z. B. 15 LE in x-, y- oder z-Richtung. Man kann aber auch ausnutzen, dass $12^2 + 9^2 + 0^2 = 15^2$ ist und wie in Teil a) argumentieren.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

2 Die Mittelpunkte aller möglichen Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Ein Kreismittelpunkt kann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ sein.

Für den Mittelpunkt gilt: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, also $M = (1|-2|2)$.

Für den Radius gilt: $r = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

3 a) Quadratische Ergänzung: $(x_1^2 - 4x_1 + 4) + (x_2^2 - 2x_2 + 1) = 20 + 4 + 1 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 25$
Die Gleichung beschreibt einen Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $M = (2|1)$ und Radius $r = 5$.

b) Quadratische Ergänzung: $(x_1^2 - 4x_1 + 4) + (x_2^2 + 6x_2 + 9) + x_3^2 = -14 + 4 + 9$
$\Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + x_3^2 = -1$. Da r^2 keine negative Zahl sein kann, wird durch die Gleichung keine Kugel im Raum beschrieben.

4 (1) Die Gerade kann die Kugeloberfläche in zwei Punkten schneiden; Sonderfall: Die Gerade geht durch den Kugelmittelpunkt.
(2) Die Gerade kann eine Tangente sein, wenn sie die Kugel in einem Punkt berührt.
(3) Die Gerade kann eine Passante sein, wenn sie an der Kugel vorbeigeht.

5 a) Ebene und Kugel können keinen Schnittpunkt, einen Berührpunkt oder einen Schnittkreis haben.

b) Abstand der Ebene vom Mittelpunkt der Kugel: $d(E,M) = \left|\frac{8\cdot 1 + 2\cdot 2 - 2\cdot 3 + 14}{\sqrt{8^2 + 2^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{20}{\sqrt{72}} \approx 2{,}36$

Da der Abstand der Ebene zum Mittelpunkt der Kugel größer ist als der Radius, haben die Ebene und die Kugel keine gemeinsamen Punkte.

6 a) Der Kugelmittelpunkt liegt in der x_1x_3-Ebene und auf g, ist also Schnittpunkt von g und der x_1x_3-Ebene.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ schneidet die x_1x_3-Ebene in $M = (1|0|1) \Rightarrow$ K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)^2 = 25$.

b) Für den Abstand von E und $M = (1|0|1)$ gilt $d(M, E) = \frac{2}{3} < 5 = r$. Also schneiden sich die Ebene E und die Kugel K in einem Schnittkreis.

7 Weil alle Geradenpunkte die x_1-Koordinate 0 haben, ist die Schar ein ebenes Geradenbündel in der x_2x_3-Ebene durch $S = (0|4|-1)$.
Da der Abstand von M zur x_2x_3-Ebene 1 beträgt, also kleiner ist als der Kugelradius $r = 3$, kann keine Gerade der Schar eine Kugeltangente sein.
Da $|\overrightarrow{SM}| = \sqrt{5} < r$, also S in der Kugel liegt, ist jede Schargerade eine Kugelsekante.

Kapiteltest (Seite 103, 104)

1 a) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ eingesetzt in die Kugelgleichung K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\-8\\-9\end{pmatrix}\right)^2 = 33$ ergibt

$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)^2 = 33 \Rightarrow$ keine Lösung für t; somit ist AB eine Passante.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ eingesetzt in K (siehe Teil a)) ergibt $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}\right)^2 = 33$

$\Rightarrow$ $t = 0$ oder $t = 1$; somit sind A und B Schnittpunkte.

c) AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingesetzt in K (siehe Teil a)) ergibt $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 33$

$\Rightarrow$ $t = 0$; somit ist A Berührpunkt.

2 a) Quadratische Ergänzung liefert Kreisgleichung K: $(x_1 - 2)^2 + \left(x_2 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$.

b) Es gilt $(0-2)^2 + \left(0 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$ und damit liegt der Ursprung auf dem Kreisrand.

c) Für die Tangente t gilt t: $(\vec{0} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2$, also t: $\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{65}{4}$ $\left(t: y = -\frac{4}{7}x\right)$.

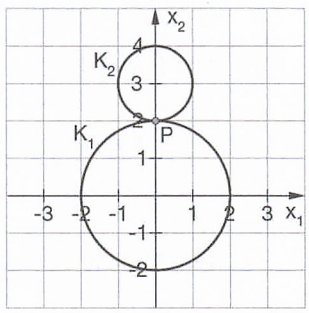
d) Der Berührpunkt B ist der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden OM durch den Ursprung und M mit OM: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Einsetzen der Geraden OM in die Kreisgleichung K: $\left(t\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{65}{4}$ $\Rightarrow$ $t_1 = 0$ oder $t_2 = 2$.

Die Berührpunkte sind also der Ursprung O und B = (4|7).

Für die Tangente t′ gilt t′: $(\vec{b} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2$, also t′: $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{65}{4}$ $\left(t': y = -\frac{4}{7}x + \frac{65}{7}\right)$.

3 Einsetzen von K_2 in K_1 (x_1 eliminieren) liefert die Lösung $x_2 = 2$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$.
Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Somit haben die beiden Kreise den gemeinsamen Punkt P = (0|2).



4 Der Kugelradius r muss gleich dem Abstand d(E, M) sein.

Die Hesse'sche Normalenform von E ist E: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = 0$.

$\Rightarrow$ $d(E, M) = \left|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{7}(-51 - 12)\right| = 9$ $\Rightarrow$ K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$.

5 Für K_1 gilt: $M_1 = (2|3|2)$, $r_1 = 3$; für K_2 gilt: $M_2 = (3|5|-1)$, $r_2 = 5$.
Wegen $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(2-3)^2 + (3-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 < r_1 + r_2$ und $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{14} > |r_1 - r_2|$
haben die beiden Kugeln einen Schnittkreis.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

6 a) Gesucht sind die Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius r = 85 km:
Durch Einsetzen der Koordinaten der Flugbahn g in die Kugelgleichung
$(x_1 + 10{,}2)^2 + (x_2 + 13{,}6)^2 + x_3{}^2 = 85^2$ erhält man $t^2 = 282{,}24 \Rightarrow t_1 = -16{,}8$ oder $t_2 = 16{,}8$.
Der Parameter $t_1 = -16{,}8$ liefert den Eintrittspunkt S_1 in den Überwachungsbereich:
$S_1 = (-74{,}4\,|\,40{,}8\,|\,12)$.

b) Der Austrittspunkt aus dem Überwachungsbereich ergibt sich für $t_2 = 16{,}8$: $S_2 = (60\,|\,{-60}\,|\,12)$.
Die Flugstrecke im Überwachungsbereich ist der Abstand der Punkte S_1 und S_2:

$$\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}60\\-60\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-74{,}4\\40{,}8\\12\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}134{,}4\\100{,}8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{134{,}4^2 + 100{,}8^2} = \sqrt{28224} = 168 \text{ (in Kilometern).}$$

7 a) Den Würfel kann man sich in acht Einheitswürfel unterteilt vorstellen. Die Raumdiagonale des Einheitswürfels ist $d = \sqrt{3}$. Da der Berührpunkt der äußeren Kugeln mit der Innenkugel auf der jeweiligen Raumdiagonalen liegt, müssen sich r und r* zu $\sqrt{3}$ ergänzen.
Wenn die äußeren Kugeln sich berühren, so haben die äußeren Kugeln einen größtmöglichen Radius von r* = 1. Wenn die Innenkugel die Oberfläche des Würfels berührt, so ist ihr größtmöglicher Radius r = 1. Damit gilt $\sqrt{3} - 1 \le r \le 1$.

b) Die Innenkugel mit Radius r = 0,5 hat die Gleichung K: $\vec{x}^2 = \frac{1}{4}$.

Die markierte Außenkugel mit Mittelpunkt M = (1 | 0 | 1) und Radius $r^* = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ hat die Gleichung

$$K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)^2 = 3{,}25 - \sqrt{3}.$$

8 a) Es gibt gemeinsame Punkte der Kugel mit der Ebene E, die durch A, B und T verläuft, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes M zur Ebene E kleiner oder gleich dem Kugelradius ist.
Die Ebene E kann wie folgt beschrieben werden:

Da $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-4\\-2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\-16\end{pmatrix}$, kann $\vec{n} = \begin{pmatrix}5\\5\\-8\end{pmatrix}$ als Normalenvektor genutzt werden

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix}5\\5\\-8\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}8\\4\\3\end{pmatrix}\right) = 0 \text{ oder auch } E: 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 36.$$

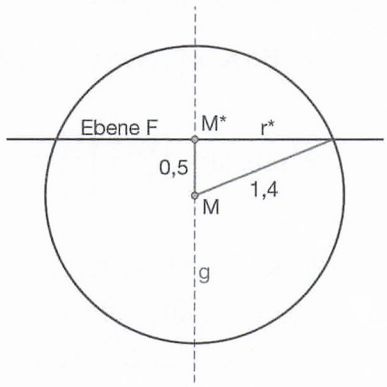
Der Abstand von M zu E ist: $d(M, E) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{AM}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{114}} \cdot \begin{pmatrix}5\\5\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{-16}{\sqrt{114}}\right| \approx 1{,}4985$

Da $d(M, E) > r$ ist, gibt es keine gemeinsamen Punkte.

b) Der Mittelpunkt M* des Schnittkreises ist der Fußpunkt des Lotes, das vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene F, die durch A, B und C verläuft, gefällt wird.
Die Gerade g, die durch den Kugelmittelpunkt verläuft und senkrecht zur Ebene F ist, kann durch die Gleichung g:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\2{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dabei ist $\vec{n}_F = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

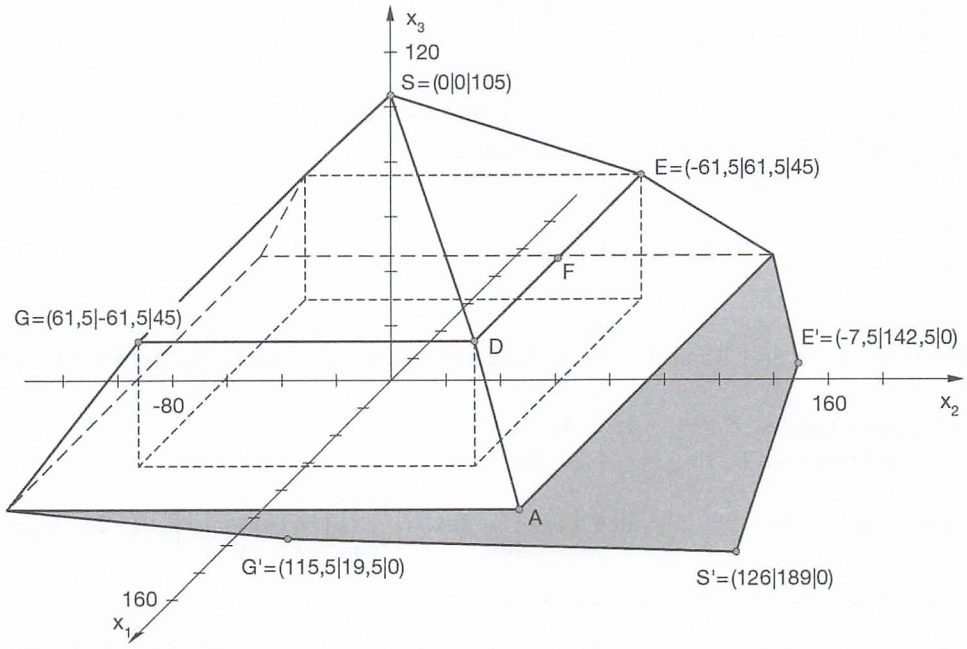
Da für alle Punkte der Ebene F $x_3 = 3$ gilt, ist $2{,}5 + t = 3$,
also $t = 0{,}5$.
Dies ergibt den Mittelpunkt M* des Schnittkreises M* = (4 | 4 | 3).
Wegen $d(M, M^*) = 0{,}5$ und Kugelradius r = 1,4, folgt mit dem Satz des Pythagoras für den Schnittkreisradius r* dann:
$r^{*2} = 1{,}4^2 - 0{,}5^2 = 1{,}71 \Rightarrow r^* = \sqrt{1{,}71}$.



ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Knickpyramide (Seite 106)

a)/d) Skizze der Knickpyramide inklusive des Schattens aus Teilaufgabe d):



b) Die Gerade durch die Punkte A und D lautet $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 94 \\ 94 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -32{,}5 \\ -32{,}5 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x_3-Achse liefert die ursprüngliche Höhe, die ca. 130 m betragen hätte.

c) Flächen der vier oberen Dreiecke: $A_D = 4 \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DS} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -123 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -61{,}5 \\ -61{,}5 \\ 60 \end{pmatrix} \right| = 246 \cdot \sqrt{60^2 + 61{,}5^2} \approx 21136$

Höhe des Trapezes über den Mitten der zugehörigen Kanten:

$$h = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 61{,}5 \\ 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 94 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -32{,}5 \\ 45 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3081{,}25} \approx 55{,}5$$

$$A_T = 4 \cdot A_{TR} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 2 \cdot (188 + 123) \cdot \sqrt{3081{,}25} = 622 \cdot \sqrt{3081{,}25} \approx 34527$$

Somit ergibt sich für den Oberflächeninhalt der Knickpyramide: $A_O = A_D + A_T \approx 21136 + 34527 = 55663$

e) Bestimmung des unteren Neigungswinkels α über die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ der Ebene ADE und $\vec{n}_2$ der x_1x_2-Ebene: $\vec{n}_1 = \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -123 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 32{,}5 \\ 32{,}5 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5535 \\ -3997{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{0 + 0 + (-3997{,}5) \cdot (-1)}{\sqrt{5535^2 + 3997{,}5^2} \cdot 1} = \frac{3997{,}5}{\sqrt{46616231{,}25}} \approx 0{,}585 \Leftrightarrow \alpha \approx 54°$$

Bestimmung des oberen Neigungswinkels β mithilfe des Vektors $\overrightarrow{FS}$ von der Mitte der Knickkante $\overline{DE}$ zur Spitze S und des Einheitsvektors $\vec{e}_2$:

$$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 105 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 61{,}5 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -61{,}5 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{FS} \cdot (-\vec{e}_2)}{\left| \overrightarrow{FS} \right| \cdot 1} = \frac{0 + (-1) \cdot (-61{,}5) + 0}{\sqrt{61{,}5^2 + 60^2}} = \frac{61{,}5}{\sqrt{7382{,}25}} \approx 0{,}716 \Leftrightarrow \beta \approx 44°$$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Walmdachhaus (Seite 107)

a) Für die Länge der Dachkanten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ gilt:

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-12\\8\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 12; \quad |\overrightarrow{BE}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{29} \approx 5{,}39$$

Die Länge der Dachkante $\overline{BC}$ beträgt 12 m, die der Dachkante $\overline{BE}$ beträgt ungefähr 5,39 m.
Es sei β der Winkel zwischen den beiden Dachkanten. Dann gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}}{12 \cdot \sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \beta \approx 68{,}2°$$

b) Da $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\36\\48\end{pmatrix}$, kann $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene E_1 genutzt werden. Eine Koordinatenform dieser Ebene ist E_1: $3x_2 + 4x_3 = 44$.
Der Punkt $F = (-10|4|8)$ liegt auf E_1, da $3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 44$.

Für den Abstand des Punktes A von E_1 gilt: $d(A, E_1) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{BA}\right| = \left|\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\5\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{5}(0 - 24 - 0)\right| = 4{,}8$

Der Punkt A hat einen Abstand von 4,80 m von der Ebene E_1.

c) Es reicht z. B. zu zeigen, dass $\overline{EF}$ und $\overline{BC}$ parallel verlaufen und dass der Winkel β (siehe Teil a)) und der Winkel γ, unter dem sich die Kanten $\overline{CB}$ und $\overline{CF}$ schneiden, gleich groß sind.

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}$; da $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, folgt die Parallelität.

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CF}|} = \frac{\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}}{12 \cdot \sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \gamma = \beta \approx 68{,}2°$$

Für den Flächeninhalt des Trapezes BCFE gilt: $A = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{EF}|\right) \cdot |\overrightarrow{EB}| \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}(12 + 8) \cdot 5 = 50$

Somit beträgt der Flächeninhalt 50 m².

d) Die Dachfläche ABE stellt mit der Strecke $\overline{PQ}$ eine Strahlensatzfigur dar.

Mit $|\overrightarrow{AB}| = 8$ gilt: $\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{EP}|}{|\overrightarrow{EA}|} = \frac{|\overrightarrow{EQ}|}{|\overrightarrow{EB}|} = \frac{1}{4}$, also $|\overrightarrow{EP}| = \frac{1}{4} \cdot |\overrightarrow{EA}|$ und $|\overrightarrow{EQ}| = \frac{1}{4} \cdot |\overrightarrow{EB}|$.

Somit gelten $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\3\\7{,}25\end{pmatrix}$, also $P = (-1{,}5|3|7{,}25)$

und $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\5\\7{,}25\end{pmatrix}$, also $Q = (-1{,}5|5|7{,}25)$.

e) Der Punkt R ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden g, die durch W parallel zur x_2-Achse verläuft, mit der Ebene $E_1 \Rightarrow$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\15\\7{,}7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung von E_1 erhält man:
$3 \cdot (15 + t) + 4 \cdot 7{,}7 = 44 \Rightarrow 3t = -31{,}8 \Rightarrow t = -10{,}6$.

Folglich gilt $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}-7\\15\\7{,}7\end{pmatrix} - 10{,}6 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4{,}4\\7{,}7\end{pmatrix}$, also $R = (-7|4{,}4|7{,}7)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Spat (Seite 108)

a) $V = \left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 2a & 4a \end{pmatrix}\right| = |-16a^2 - 4a^2 + 8a^2| = 12a^2 \Rightarrow$ Für $a = 0$ sind die Vektoren, die den Spat aufspannen, linear abhängig und das Volumen des Spats gleich null.

b) $F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{P_aQ_a} \times \overrightarrow{P_aR_a}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -2a \\ 2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -a \\ 4a \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36a^4 + 180a^2} = 18 \Rightarrow a = \pm 2$

c) Grundfläche: $\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{OQ_2} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Seitenfläche 1: $\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{OR_2} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha_1) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Rightarrow \alpha_1 = 19{,}0°$

Seitenfläche 2: $\overrightarrow{OQ_2} \times \overrightarrow{OR_2} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha_2) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow \alpha_2 = 44{,}4°$

Jeweils gegenüberliegende Winkel ergeben sich aus $180° - \alpha_{1/2}$.

d_1) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$

Mittelpunkt $M_{E'}$ von E′ aus Schnitt der Diagonalen f und h von E′:

f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{E'} = (-1\,|\,0\,|\,10)$

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OM_{E'}} + v\,\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $g \cap E \Rightarrow v = \frac{4}{7} \Rightarrow S = \left(\frac{1}{7}\middle|-2\frac{2}{7}\middle|9\frac{3}{7}\right)$

d_2) $\left|\overrightarrow{SM_{E'}}\right| = 2{,}62$ LE

d_3) Spatmittelpunkt aus Schnitt der Raumdiagonalen i und j:

i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ und j: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow M = (0\,|\,0\,|\,6)$

Abstand von M und der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow s = \frac{2}{7};\quad d = \left|\begin{pmatrix} -1 + \frac{4}{7} \\ 0 - \frac{8}{7} \\ 10 - \frac{2}{7} \end{pmatrix}\right| \approx 9{,}79 \text{ LE}$$

Kristallspat (Seite 109)

a) Die Punkte F, G und H der Deckfläche lassen sich bestimmen durch:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (16\,|\,7\,|\,0)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow G = (18\,|\,11\,|\,2)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow H = (9\,|\,5\,|\,5)$$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Damit gilt für die Ebene D_1:

$$D_1:\ \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r\overrightarrow{EF} + s\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix}16\\7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}\right) + s\left(\begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

oder in Koordinatenform: $D_1: x_1 - x_2 + x_3 = 9$

b) Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind. Vektoriell bedeutet dies, dass z. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gelten muss:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}11\\10\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt A des Parallelogramms, das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannt wird, beträgt

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}24\\-24\\24\end{pmatrix}\right| = 24\sqrt{3} \approx 41{,}57.$$

Somit beträgt der Flächeninhalt ungefähr $42\,\text{mm}^2$.

Für das Spatvolumen V gilt: $V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix}24\\-24\\24\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}\right| = 216.$

Somit beträgt das Volumen $216\,\text{mm}^3$.

c) Der Auftreffpunkt des Lichtstrahls auf die Grundfläche ist der Schnittpunkt der Geraden des Lichtstrahls mit der Grundfläche ABCD.

Der Lichtstrahl kann durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-11\\15\\-19\end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Eine Normalenform der Ebene G_1, die die Grundfläche ABCD enthält, ist $G_1: \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$, da

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\-24\\24\end{pmatrix} \text{ und somit } \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ ein Normalenvektor von } G_1 \text{ ist.}$$

Einsetzen der Geradengleichung g in die Normalenform von G_1 liefert: $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-11\\15\\-19\end{pmatrix}\right) = 0$

$\Rightarrow 9 - 45t = 0 \Rightarrow t = 0{,}2$. Der Schnittpunkt R der Geraden mit der Ebene G_1 lautet:

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix}-11\\15\\-19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8{,}8\\8\\-0{,}8\end{pmatrix}.$$

Der Punkt R liegt in der Grundfläche ABCD, wenn es r, s mit $0 \le r, s \le 1$ gibt, die $\overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$ erfüllen. Diese Gleichung ist für $r = s = 0{,}8$ erfüllt. Damit liegt $R = (8{,}8\,|\,8\,|\,-0{,}8)$ im Inneren der Grundfläche ABCD.

Der gesuchte Winkel kann bestimmt werden durch: $\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{45}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{707}} \approx 0{,}9771$

$\Rightarrow \alpha \approx 77{,}7°$. Der Winkel, unter dem der Lichtstrahl die Grundfläche trifft, ist etwa 77,7°.

d) Die Punkte L, R und L* bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Die Senkrechte h auf die Grundfläche durch R wird mit der Gleichung $h: \vec{x} = \overrightarrow{OR} + t\vec{n} = \begin{pmatrix}8{,}8\\8\\-0{,}8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ beschrieben.

Die Senkrechte durchstößt die Deckfläche im Punkt M, der sich als gemeinsamer Punkt von h und D_1 bestimmen lässt. Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatenform von D_1 erhält man $M = (11{,}8\,|\,5\,|\,2{,}2)$. L* errechnet sich aus:

$$\overrightarrow{OL^*} = \overrightarrow{OL} + 2 \cdot \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}11{,}8\\5\\2{,}2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}6\\0\\-1{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12{,}6\\5\\1{,}4\end{pmatrix} \Rightarrow L^* = (12{,}6\,|\,5\,|\,1{,}4).$$

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Sendemast (Seite 110)

a) Der Fußpunkt F = (4|3|0) des Sendemastes liegt in der x_1x_2-Ebene, da die x_3-Koordinate 0 ist. F liegt nicht im Hang, da in der x_1x_2-Ebene der Hang durch die Gerade durch die Punkte (6|0|0) und (0|6|0) begrenzt wird. Alle Punkte, bei denen die Summe der x_1- und x_2-Koordinate kleiner oder gleich 6 ist, liegen auf dem Hang. Da 4 + 3 > 6 ist, liegt F nicht auf dem Hang.

b) Der Neigungswinkel zwischen der Ebene H und der x_1x_2-Ebene ist der Winkel der dazugehörigen Normalenvektoren. Der gesuchte Winkel kann bestimmt werden durch:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_H \cdot \vec{n}_{x_1x_2}}{|\vec{n}_H| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \approx 0{,}7276 \Rightarrow \alpha \approx 43{,}3°.$$

c) Der Verankerungspunkt V_1 auf halber Höhe am Sendemast ist $V_1 = (4|3|3)$.
Der zweite Verankerungspunkt V_2 am Hang ist der Schnittpunkt der zum Hang orthogonalen Geraden h durch den Punkt V_1 mit der Ebene H.

Einsetzen der Geradengleichung h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform von H liefert:

$2(4 + 2t) + 2(3 + 2t) + 3(3 + 3t) = 12 \Rightarrow t = -\frac{11}{17}$

Für den Schnittpunkt V_2 gilt damit $\overrightarrow{OV_2} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} - \frac{11}{17} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{46}{17}\\\frac{29}{17}\\\frac{18}{17}\end{pmatrix}$.

Der Verankerungspunkt am Hang beträgt $V_2 \approx (2{,}71|1{,}71|1{,}06)$.

Die Länge des Stahlseils ist $|\overrightarrow{V_1V_2}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{46}{17}\\\frac{29}{17}\\\frac{18}{17}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{22}{17}\\-\frac{22}{17}\\-\frac{33}{17}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{121}{17}} \approx 2{,}668.$

Das Seil ist ungefähr 26,68 m lang.

d) Die Spitze S des Sendemastes liegt im Punkt S = (4|3|6). Der Knickpunkt am Sendemast ist K = (4|3|k). Die Spitze S des Sendemastes zum Knickpunkt K muss die gleiche Entfernung haben wie der Punkt Q zum Knickpunkt K.

$$|\overrightarrow{KS}| = |\overrightarrow{KQ}| \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\\k\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\\k\end{pmatrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}0\\0\\6-k\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\2-k\end{pmatrix}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(6-k)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2-k)^2} \Rightarrow (6-k)^2 = 16 + (2-k)^2 \Rightarrow k = 2$$

Für den Knickpunkt K gilt damit K = (4|3|2).

Oberlichter (Seite 111)

a) Die Dreiecke sind gleichschenklig, daher reicht es z. B. einen Basiswinkel des Dreiecks ABP zu berechnen:

$$\cos(\sphericalangle PBA) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BP}|} = \frac{\begin{pmatrix}24\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}12\\-12\\24\end{pmatrix}}{24 \cdot \sqrt{864}} \Rightarrow \sphericalangle PBA \approx 65{,}9°.$$

Somit gelten $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PBA \approx 65{,}9°$ und $\sphericalangle APB = 180° - 2 \cdot \sphericalangle PBA \approx 48{,}2°$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABP, das von den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BP}$ aufgespannt wird, beträgt

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}24\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}12\\-12\\24\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\-576\\-288\end{pmatrix}\right| = 0{,}5\sqrt{414\,720} \approx 322.$$

Somit beträgt der Glasbedarf für ein Oberlicht, das aus vier Dreiecken besteht, ungefähr $4 \cdot 322\,\text{dm}^2 = 12{,}88\,\text{m}^2$.

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Die Länge einer Kante, die zur Spitze P führt, kann z. B. durch $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ bestimmt werden:

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{864} \approx 29{,}39.$$

Somit ist jede zur Spitze führende Kante ungefähr 2,94 m lang.
Der Winkel zwischen den beiden benachbarten Seitenflächen entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren der Ebenen, auf denen die Seitenflächen liegen.
Ein Normalenvektor der Ebene, in der das Dreieck ABP liegt, ist das Vektorprodukt der aufspannenden Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BP}$: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -576 \\ -288 \end{pmatrix}$, also $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Normalenvektor der Ebene, in der das Dreieck BCP liegt, ist das Vektorprodukt der aufspannenden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BP}$: $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -576 \\ 0 \\ 288 \end{pmatrix}$, also $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0{,}2 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 78{,}46°$$

c) Die Gewindestange verläuft entlang der Geraden g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Glasfläche ABP liegt in der Ebene E_1, die $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als einen Normalenvektor besitzt.

Damit ist $E_1: 2x_2 + x_3 = d$ eine Koordinatenform von E_1. Da $P = (0|0|24)$ in E_1 liegt, gilt $E_1: 2x_2 + x_3 = 24$.
Durch Einsetzen von g in E_1 erhält man: $-24 + 4t + t = 24 \Rightarrow t = 9{,}6$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + 9{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7{,}2 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow F = (2|7{,}2|9{,}6) \text{ ist der Befestigungspunkt.}$$

d) Es reicht aus Symmetriegründen aus, ein Seitendreieck zu betrachten. Für den Schwerpunkt S des Seitendreiecks ABP gilt: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Die Lampe L liegt sowohl auf der x_3-Achse $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als auch auf der Geraden h mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die orthogonal zur Ebene ABP durch den Schwerpunkt S verläuft.
Für den Schnittpunkt gelten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Aus $8 + 2s = 0$ folgt $s = -4$.
Damit ist die Lampe im Punkt $L = (0|0|4)$ aufgehängt.

Messehalle (Seite 112)

a_1) Untersuchung der Bodenfläche:
Aus $d(A_1, B_1) = d(D_1, C_1) = \sqrt{64} = 8$ und $d(A_1, D_1) = d(B_1, C_1) = \sqrt{256} = 16$ folgt:
Die Bodenfläche ist ein Parallelogramm.
Weiter gilt: $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} \perp \overrightarrow{A_1D_1}$.

Also ist die Bodenfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $8\,\text{m} \cdot 16\,\text{m} = 128\,\text{m}^2$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Untersuchung der Dachfläche:

Aus $d(A_2, B_2) = d(D_2, C_2) = \sqrt{64} = 8$ und $d(A_2, D_2) = d(B_2, C_2) = \sqrt{484} = 22$ folgt: Die Dachfläche ist ein Parallelogramm.

Weiter gilt: $\overrightarrow{A_2B_2} \cdot \overrightarrow{A_2D_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} \perp \overrightarrow{A_2D_2}$.

Also ist die Dachfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $8\,\text{m} \cdot 22\,\text{m} = 176\,\text{m}^2$.

a_2) Die Dachfläche ist um 37,5 % größer als die Bodenfläche.

a_3) Winkel zwischen W_1 und W_2:

Eine Koordinatenform von W_1 ist: $x_1 = 4$. Ein Normalenvektor ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für W_2: $\vec{x} = \overrightarrow{OC_1} + r\overrightarrow{C_1D_1} + s\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Aus $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ folgt $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Der Winkel zwischen W_1 und W_2 beträgt 90°.

Winkel zwischen W_1 und W_4:

Für W_4: $\vec{x} = \overrightarrow{OB_1} + r\overrightarrow{B_1A_1} + s\overrightarrow{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist $\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Aus $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_4 = 0$ folgt $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_4$. Der Winkel zwischen W_1 und W_4 beträgt 90°.

Eine Koordinatenform von $W_3 = A_1D_1D_2A_2$ ist: $x_1 = -4$. Somit sind W_1 und W_3 parallel. Die Bedingung IV ist also erfüllt.

a_4) Berechnung des Winkels φ zwischen W_2 und dem Boden:

Ein Normalenvektor des Bodens ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; ein Normalenvektor von W_2 ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 63{,}43°$. Wegen Bedingung V ist ein Stützpfeiler notwendig.

b) Der Stützpfeiler ist parallel zum Normalenvektor von W_2 und enthält F; er liegt also auf der Geraden s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist der Schnittpunkt S von W_2 und s.

Aus $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich: $r = 0{,}5$; $s = 0{,}75$; $t = 6$.

Der Auftreffpunkt ist $S = (0|11|6)$. S ist ein Punkt der Hallenwand, da $r < 1$ und $s < 1$.

Es gilt: $d(F, S) = \sqrt{144 + 36} \approx 13{,}42$. Der Stützpfeiler muss ca. 13,5 m lang sein.

Quadratische Pyramide (Seite 113)

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 - c_3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow c_3 = 12$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow D = (5|-9|8)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt des Quadrats: $M = (5|-4|8)$

Senkrechte zur Grundfläche: s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} s_1 = 5 + 4t \\ s_2 = -4 \\ 14 = 8 - 3t \end{vmatrix} \Rightarrow S = (-3|-4|14)$

ISBN: 978-3-507-85586-1

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) $G = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 50\,\text{FE};\ h = \left|\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\right]\right| = 10\,\text{LE} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = 166\frac{2}{3}\,\text{VE}$

$F_{ABS} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\0\\10\end{pmatrix}\right| = 37\frac{1}{2}\,\text{FE} \Rightarrow O = G + 4\cdot F_{ABS} = 200\,\text{FE}$

c) Ebene ABS: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; Ebene ADS: $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AS} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha \approx 83{,}6°$

d) $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 0;\ \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Der Normalenvektor von G ist auch ein Normalenvektor von E, die Ebenen sind also parallel.
Es gilt: d(S, G) = h = 10 (siehe Teil b)).

Weiterhin: $d(S, E) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}\right] = 5$

Da $0 < d(S, E) < d(S, G)$ gilt sowie die Vektoren von S nach E und von S nach G in dieselbe Richtung zeigen, liegt E zwischen S und G.

e) 1. Möglichkeit: Zentrische Streckung

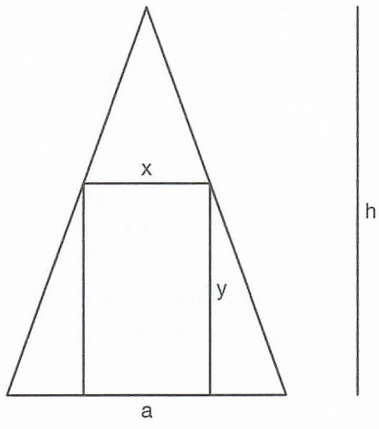
Die kleine Pyramide ergibt sich aus der großen durch eine zentrische Streckung von S aus mit $k = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{Stumpf} = V_{groß} - V_{klein} = 166\frac{2}{3}\,\text{VE} - \frac{1}{8}\cdot 166\frac{2}{3}\,\text{VE} = 145\frac{5}{6}\,\text{VE}.$

2. Möglichkeit: direkte Berechnung analog zu b).

f) Ein Quadrat bietet die größtmögliche Grundfläche aller möglichen Rechtecke. $V = x^2\cdot y$

Nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \Leftrightarrow y = h - \frac{x}{a}\cdot h$



$\Rightarrow V(x) = x^2\cdot h - x^3\cdot\frac{h}{a}$

$\Rightarrow V'(x) = 2\cdot h\cdot x - 3\cdot\frac{h}{a}\cdot x^2$

$\Rightarrow V''(x) = 2\cdot h - 6\cdot\frac{h}{a}\cdot x$

Extremum: $V'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow V''(0) = 2\cdot h > 0 \Rightarrow$ TP (kein Quader wird ausgeschnitten)

$\Rightarrow V''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2\cdot h < 0 \Rightarrow$ HP

Der maximale Quader hat die Kantenlängen: $x = \frac{2}{3}a;\ y = \frac{1}{3}h.$

Geradenscharen (Seite 114)

a) Für die Punkte der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$ gilt:

I: $x_1 = -3s$ $\wedge$ II: $x_2 = 6 - 4r - 6s$ $\wedge$ III: $x_3 = 6 + 2r + 3s$

I in II und III eingesetzt ergibt: II′: $x_2 = 6 - 4r + 2x_1$ $\wedge$ III′: $x_3 = 6 + 2r - x_1$

Addition von II′ und $2\cdot$III′ ergibt die Koordinatenform E: $x_2 + 2x_3 = 18$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor von F ist $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt für den Winkel φ zwischen E und F: $\cos(\varphi) = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \Leftrightarrow \varphi = 90°$.

Die Ebenen stehen senkrecht aufeinander.

c) Jeder Punkt P von h hat die Darstellung $P = (0|2 + 2t_1|8 - t_1)$. Es gilt $(2 + 2t_1) + 2(8 - t_1) = 18$.
Also liegt P unabhängig von t_1, und damit auch h, in E.

d) Damit ein Punkt $P = (0|2 + 2t_1|8 - t_1)$ von h in F liegt, muss gelten: $-2(2 + 2t_1) + (8 - t_1) = -14 \Leftrightarrow t_1 = 3{,}6$.
Der gesuchte Schnittpunkt ist $S = (0|9{,}2|4{,}4)$ (Probe: $S \in F$, denn $-18{,}4 + 4{,}4 = -14$).

e) Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zum Normalenvektor von F: $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist F orthogonal zu $\overline{GH}$.

Oder: Da G und H beide in E liegen und F orthogonal ist zu E, ist F orthogonal zu $\overline{GH}$.
G liegt in F, denn es gilt: $-3 - 16 + 5 = -14$.

f) G muss Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP'}$ sein. Hieraus und mit $P' = (x_1|x_2|x_3)$ folgt:
$G = \left(\frac{0 + x_1}{2} \middle| \frac{10 + x_2}{2} \middle| \frac{6 + x_3}{2}\right)$. Aus $3 = \frac{0 + x_1}{2}$, $8 = \frac{10 + x_2}{2}$ und $5 = \frac{6 + x_3}{2}$ folgt:
$x_1 = 6$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$. Es gilt also $P' = (6|6|4)$.

g) Die Dreiecksfläche besteht aus den Punkten R, für die gilt:

$\vec{x}_R = \vec{h} + r\left(\vec{p} - \vec{h}\right) + s\left(\vec{p}' - \vec{h}\right)$, $0 \le r, s \le 1$; d.h. $\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $0 \le r, s \le 1$.

Da $\overline{GH} \perp F$ und $\overline{PP'} \subset F$, ist $\overline{GH}$ die Höhe des Dreiecks. Es gilt also für den Flächeninhalt:
$A_D = \frac{1}{2} \cdot d(G, H) \cdot d(P, P') = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{54} \cdot \sqrt{56} \approx 27{,}5$ (in FE).

h) Jede Gerade g_a enthält für $t_2 = 0$ bzw. $t_2 = 1$ die Punkte $P_0 = (3|8|5)$ bzw. $P_1 = (2|8 + 6a|5 - 3a)$.
Mit E: $x_2 + 2x_3 = 18$ folgt, dass P_0 und P_1 für jedes a in E liegen; und damit die Gerade g_a.

Matrizen – Übersicht (Seite 116)

(m × n)-Matrix	Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.
Addition von Matrizen	Beide Matrizen müssen die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten haben. Die Einträge der Summen-Matrix sind die Summen der entsprechenden Einträge in den Summanden-Matrizen.
S-Multiplikation bei Matrizen	Kann man immer ausführen. Jeder Matrixeintrag wird mit der reellen Zahl multipliziert.
Matrizenprodukt I	Das Produkt A · B existiert nur, wenn A eine (m × n)- und B eine (n × p)-Matrix ist. Das Produkt ist eine (m × p)-Matrix.
Matrizenprodukt II	Nach dem „Falk-Schema". Bei A · B = C ist der Eintrag c_{ik} der Produktmatrix das Produkt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B.
Einheitsmatrix	Eine quadratische Matrix, die auf der Hauptdiagonalen Einsen und sonst Nullen als Einträge hat.
Inverse Matrix	Gilt für Matrizen A · B = E (E: Einheitsmatrix), dann ist B die inverse Matrix zu A (bzw. umgekehrt).
Rechengesetze	Addition: Kommutativ- und Assoziativgesetz Multiplikation: Assoziativgesetz Distributivgesetz
Übergangsmatrix	Beschreibt die Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen bei einem Prozess. Die Einträge beschreiben Vielfache des Ausgangszustandes.
Übergangsgraph	Grafische Darstellung der Zustände und der Übergänge bei einem Prozess.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Stabile Verteilung	Eine Verteilung, die sich zur nächsten Generation nicht verändert. Näherungsweise Bestimmung durch Multiplikation einer Anfangsverteilung mit einer Potenz der Übergangsmatrix, wobei man den Exponenten vergrößert, bis eine Stabilisierung erkennbar ist. Exakte Bestimmung mit einem LGS aus dem Ansatz $M \cdot \vec{v}_S = \vec{v}_S$.
Stochastische Matrix	Eine quadratische Matrix, bei der alle Einträge nichtnegativ sind und die Summe jeder Spalte Eins ergibt.
Grenzmatrix	Falls der Grenzwert existiert, ist $M_G = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. Die Grenzmatrix erzeugt aus jeder Verteilung eine stabile Verteilung. Näherungsweise Bestimmung durch Potenz der Übergangsmatrix, wobei man den Exponenten vergrößert, bis eine Stabilisierung erkennbar ist. Exakte Bestimmung durch Berechnung des stabilen Vektors mit Spaltensumme Eins.
Zyklisch periodischer Prozess	Ein Prozess, bei dem sich die Anfangsverteilung nach p Generationen wiederholt. Für die Übergangsmatrix gilt $M^p = E$.
Input-Output-Analyse	Sie beschäftigt sich mit Güterflüssen. Dabei werden neben dem Markt auch interne Produktionsbereiche betrachtet.

Materialverflechtung – Vom Graphen zur Matrix (Seite 117)

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 18 \\ 16 & 10 & 18 \\ 11 & 6 & 15 \end{pmatrix} = C$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} = C$

Für die benötigten Rohstoffe gilt: $\begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184 \\ 129 \end{pmatrix}$.

Es werden 184 ME von R_1 und 129 ME von R_2 benötigt.

Produktionen (Seite 118)

1 Die benötigten Rohstoffe für die einzelnen Produkte können übersichtlich in einer Matrix M dargestellt werden: $M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1960 \\ 3240 \\ 2320 \end{pmatrix}$

Es wurden 1960 t von R_1, 3240 t von R_2 und 2320 t von R_3 verbraucht.

b) $\begin{pmatrix} 1960 \\ 3240 \\ 2320 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot 200 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} - 0{,}1 \cdot 240 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - 0{,}25 \cdot 120 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2066 \\ 3480 \\ 2096 \end{pmatrix}$

2 Die auf die verschiedenen Biersorten bezogenen Kapazitäten der einzelnen Standorte können übersichtlich in einer Matrix M dargestellt werden: $M = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 200 \\ 100 & 200 & 400 \\ 200 & 400 & 500 \end{pmatrix}$.

a) Das LGS $\begin{pmatrix} 200 & 300 & 200 \\ 100 & 200 & 400 \\ 200 & 400 & 500 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 470 \\ 500 \\ 760 \end{pmatrix}$ ist lösbar mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Somit kann die Produktion ohne Überschuss erfolgen.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ liefert, dass die Standorte A und C zu 80 % und B zu 50 % ausgelastet sind.

c) Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ die einzige Lösung.

Produktionsprozesse (Seite 119)

1 a) $\left(\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 48 & 56 \\ 24 & 8 & 16 \\ 14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168\,000 \\ 48\,000 \\ 54\,000 \\ 100\,000 \end{pmatrix}$

Es werden 168 000 ME von R_1, 48 000 ME von R_2, 54 000 ME von R_3 und 100 000 ME von R_4 benötigt.

b) $\begin{pmatrix} 64 & 48 & 56 \\ 24 & 8 & 16 \\ 14 & 18 & 22 \\ 36 & 32 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18800 \\ 4800 \\ 6100 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ist lösbar für $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $x_3 = 50$ und $x_4 = 11\,600$.

Es müssen noch 11 600 ME von R_4 bestellt werden, damit der Lagerbestand vollständig verarbeitet werden kann. Es können dann 100 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 50 ME von E_3 produziert werden.

2 Das LGS $(A \cdot B) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4{,}5 & 3{,}5 & 5 \\ 2 & 0{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2046 \\ 702 \\ 837 \\ 321 \end{pmatrix}$ führt zu $x_1 = 30$, $x_2 = 72$, $x_3 = 90$.

Da das Gleichungssystem lösbar ist, können alle Zutaten verarbeitet werden.

3 $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt damit $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 95 & 43 & 45 \\ 95 & 39 & 45 \\ 95 & 47 & 45 \end{pmatrix}$.

Mit dem Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ folgt für den Rohstoffvektor $\vec{x}_R$:

$\vec{x}_R = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 95 & 43 & 45 \\ 95 & 39 & 45 \\ 95 & 47 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7320 \\ 7160 \\ 7480 \end{pmatrix}$

Von R_1 müssen 7320 + 1000 – 1500 = 6820 ME bestellt werden,
von R_2 müssen 7160 + 1000 – 2700 = 5460 ME bestellt werden und
von R_3 müssen 7480 + 1000 = 8480 ME bestellt werden.

Kostenkalkulation (Seite 120)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix}$

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

b) Für die Rohstoffe gilt: $\vec{v}_R = C \cdot \vec{v}_E = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1480 \\ 1020 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden an Rohstoffen benötigt: 1480 ME von R_1, 1020 ME von R_2, 2900 ME von R_3 und 1200 ME von R_4.

Für die Zwischenprodukte gilt: $\vec{v}_Z = B \cdot \vec{v}_E = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden an Zwischenprodukten benötigt: 260 ME von Z_1, 120 ME von Z_2 und 160 ME von Z_3.

c) Für die Gesamtkosten K gilt: $K = 1{,}2 \cdot (K_R + K_Z + K_E)$.

Für die Kosten der Rohstoffe gilt: $K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{v}_R = (5\ 1\ 3\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1480 \\ 1020 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix} = (19\,520)$;

die Materialkosten betragen 19 520 €.

Für die Herstellungskosten der Zwischenprodukte gilt: $K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{v}_Z = (40\ 20\ 50) \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix} = (20\,800)$;

die Kosten betragen 20 800 €.

Für die Herstellungskosten der Endprodukte gilt: $K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{v}_E = (250\ 100) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = (8000)$;

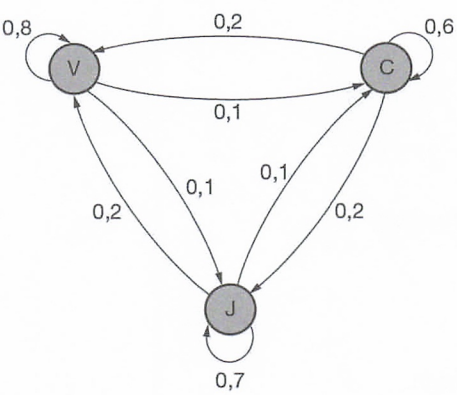
die Kosten betragen 8000 €.

Die Gesamtkosten K betragen: $1{,}2 \cdot (19\,520 + 20\,800 + 8000) = 57\,984$ (in €).

d) Es gilt: $\frac{K}{20+30} = \frac{57984}{50} = 1159{,}68$. Der Mindestverkaufspreis muss 1159,68 € betragen.

Prozesse im Alltag (Seite 121)

1

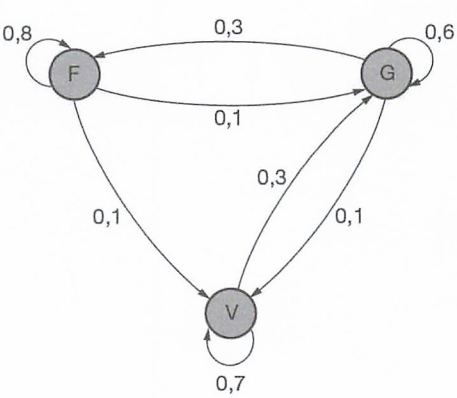


$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Besucherzahlen nach zwei Wochen:
V: 336 C: 115 J: 168

Langfristig (stabile Verteilung):
V: 300 C: 120 J: 180

2



$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

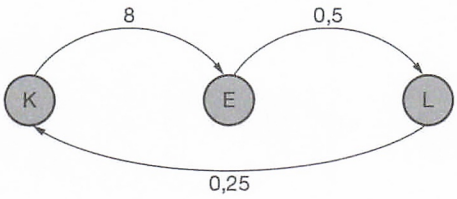
Freitag (gerundet):
F: 159 G: 110 V: 91

Langfristig (stabile Verteilung):
F: 162 G: 108 V: 90

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

3 a)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}25 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Zyklisch stabil, da $8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 1$.

b) $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nach drei Generationen wiederholt sich der Prozess.

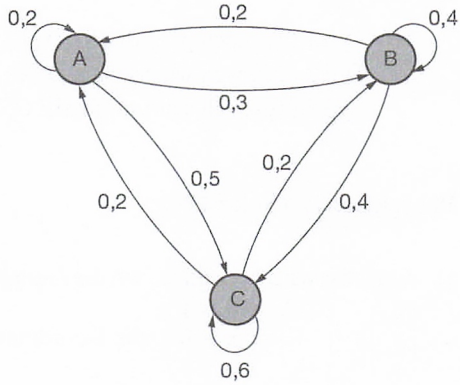
c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^6 \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 2000 \\ 900 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 123 \\ 819 \\ 369 \end{pmatrix}$

Es gibt etwa 123 Käfer.

Graphen – Tabellen – Entwicklungen (Seite 122)

a)

	A	B	C
A	0,2	0,2	0,2
B	0,3	0,4	0,2
C	0,5	0,4	0,6

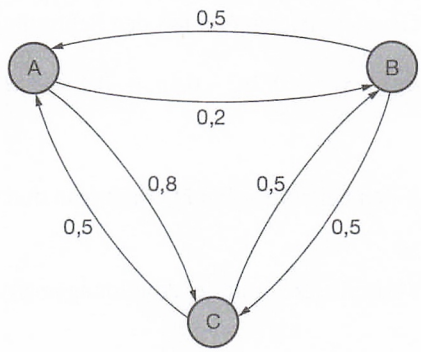


$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix};\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 170 \\ 310 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 120 \\ 166 \\ 314 \end{pmatrix};\ \vec{v}_S = \begin{pmatrix} 120 \\ 165 \\ 315 \end{pmatrix}$$

b)

	A	B	C
A	0	0,5	0,5
B	0,2	0	0,5
C	0,8	0,5	0

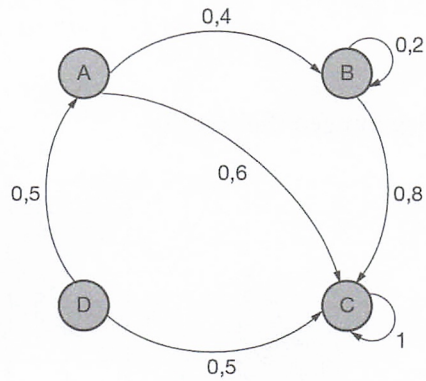


$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix};\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 72 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 42 \\ 48 \end{pmatrix};\ \vec{v}_S = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

c)

	A	B	C	D
A	0	0	0	0,5
B	0,4	0,2	0	0
C	0,6	0,8	1	0,5
D	0	0	0	0



$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 580 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 736 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig

Vermischtes (Seite 123)

1 a) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}45 \\ 0{,}8 & 0{,}55 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1{,}25 & -3 \\ 0{,}75 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{8} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{8} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} -158 & 441 \\ -882 & 2047 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{8} = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}64 & 0{,}68 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} 0{,}3344 & 0{,}3328 \\ 0{,}6656 & 0{,}6672 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}33333504 & 0{,}33333248 \\ 0{,}66666496 & 0{,}66666752 \end{pmatrix}$

Hier kann man die Stabilisierung schon gut erkennen.

3 a) Zyklische Prozesse beschreiben A, C, D, E, F und G.

b) Typ 1 (zyklisch periodisch): A, E, G; es gilt: $A^7 = A$, $E^4 = E$ und $G^4 = G$.
Typ 2 (zyklisch wachsend): D; es gilt: $D^4 = 1{,}6 \cdot D$.
Typ 3 (zyklisch schrumpfend): C, F; es gilt: $C^4 = 0{,}4 \cdot C$ und $F^4 = 0{,}81 \cdot F$.

Projektionen (Seite 124)

a) Zunächst wird berechnet, wo die Gerade durch einen beliebigen Punkt die Ebene schneidet:
$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - 3 \\ p_y + 4t \\ p_z - t \end{pmatrix}$; die Koordinaten werden in die Gleichung der Ebene eingesetzt:
$2(p_x - 3t) - (p_y + 4t) = 0$, und nach t aufgelöst. Es ergibt sich: $t = 0{,}2p_x - 0{,}1p_y$; Einsetzen in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S_p mit der Ebene:

$$\vec{s}_p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + (0{,}2p_x - 0{,}1p_y) \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

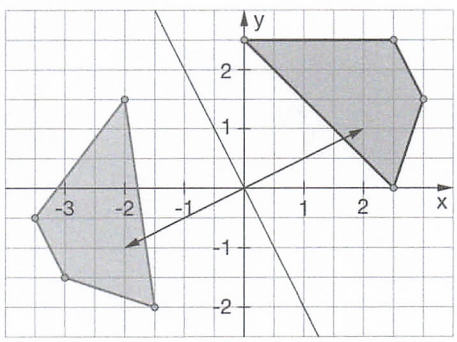
b) Einen beliebigen Punkt erhält man durch E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ s \end{pmatrix}$.

Multiplizieren mit der Abbildungsmatrix liefert: $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ s \end{pmatrix}$.

c) Es gilt: $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix} = P$; also ist auch $P^{100} = P$.

Spiegelungen (Seite 125)

1 a)



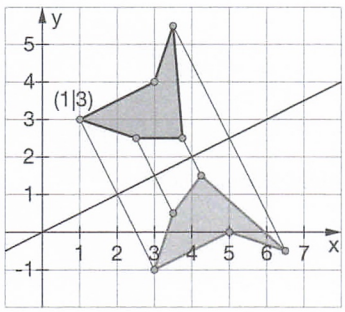
© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

b) Bei der Spiegelung wird der Vektor $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ abgebildet.

$M\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$ liefert die Abbildungsmatrix $M=\begin{pmatrix}-0{,}6&-0{,}8\\-0{,}8&0{,}6\end{pmatrix}$.

Punkte: $\begin{pmatrix}2{,}5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix}$; Bildpunkte: $\begin{pmatrix}-1{,}5\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-1{,}5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\1{,}5\end{pmatrix}$

2 a)



b) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

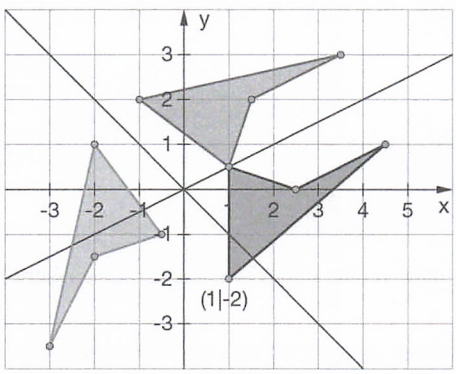
$M\cdot\begin{pmatrix}1&2{,}5\\3&2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3{,}5\\-1&0{,}5\end{pmatrix}$ liefert $M=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}8\\0{,}8&-0{,}6\end{pmatrix}$.

Die restlichen Bildpunkte sind: $M\cdot\begin{pmatrix}3{,}75\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}25\\1{,}5\end{pmatrix}$, $M\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

und $M\cdot\begin{pmatrix}3{,}5\\5{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$.

c) Für einen Punkt P der Spiegelgeraden gilt: $M\cdot\vec{p}=M\cdot\begin{pmatrix}2r\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2r\\r\end{pmatrix}$.

3 a)



b) Matrix der Spiegelung an der Geraden y = 0,5x:

$M=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}8\\0{,}8&-0{,}6\end{pmatrix}$

Matrix der Spiegelung an der Geraden y = –x:

$N=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

c) Matrix der Gesamtabbildung:

$N\cdot M=\begin{pmatrix}-0{,}8&0{,}6\\-0{,}6&-0{,}8\end{pmatrix}$

Die Gesamtabbildung könnte eine Drehung um den Ursprung sein.

Multiple Choice (Seite 126)

1 (1) Richtig.

(2) Falsch, z. B. Käferpopulation.

(3) Falsch, z. B. $\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}2\\0{,}8&0{,}8\end{pmatrix}$.

(4) Falsch, z. B. $\begin{pmatrix}-1&0{,}2\\2&0{,}8\end{pmatrix}$.

(5) Richtig.

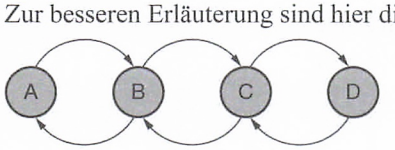
(6) Falsch, ändert man die Spaltensumme im Ausgangsvektor, so ändert sie sich auch bei der stabilen Verteilung.

(7) Richtig.

2 Nur B beschreibt einen zyklisch periodischen Prozess.

3 (2) und (3) könnten einen zyklisch periodischen Prozess beschreiben.

4 Zur besseren Erläuterung sind hier die Zustände wie folgt bezeichnet:



(1) Richtig: Es sind die Übergänge A→B und D→C. Die anderen Pfeile gehen paarweise von B bzw. C aus und haben somit laut Voraussetzung Werte aus dem Intervall (0; 1).

(2) Richtig: Es gibt keine Übergänge von einem Zustand zu sich selbst.

Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1 Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

(3) Falsch: Da zu jedem Zustand mindestens ein Pfeil führt, kann keine Zeile nur Nullen besitzen.

(4) Falsch: In der ersten bzw. vierten Zeile ist nur der Eintrag B→A bzw. C→D ungleich Null, diese sind kleiner als Eins (siehe (1)). In der zweiten und dritten Zeile sind jeweils zwei Einträge ungleich Null, von ihnen hat jeweils einer den Wert Eins (A→B bzw. D→C); also ist die Summe größer als Eins.

(5) Richtig: siehe (4).

Rund um Matrizen (Seite 127)

1 a) Alle Spaltensummen ergeben nun Zwei.

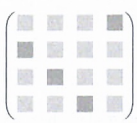
b) Alle Spaltensummen von $k \cdot M$ ergeben k. Da $k \neq 1$ gilt, ist $k \cdot M$ nicht stochastisch.

c) Es gilt: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + cs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$.

Für die Summe der 1. Spalte der Produktmatrix ergibt sich:
$ap + br + cp + dr = p(a + c) + r(b + d) = p \cdot 1 + r \cdot 1 = 1$; 2. Spalte analog.

d) Es gilt: $U = \begin{pmatrix} p & q \\ s & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$, also $\det(U) = p(1-q) - q(1-p) = p - pq - q + pq = p - q$.

e) U invertierbar $\Leftrightarrow \det(U) \neq 0 \Leftrightarrow p - q \neq 0 \Leftrightarrow p \neq q$

2 a) Population (A)  Population (B)

(A) Die Einträge unter der Diagonalen von links oben nach rechts unten sowie der rechte obere Eintrag sind von Null verschieden.

(B) Wie bei (A), zusätzlich ist die oberste Reihe bis auf den ersten Eintrag von Null verschieden.

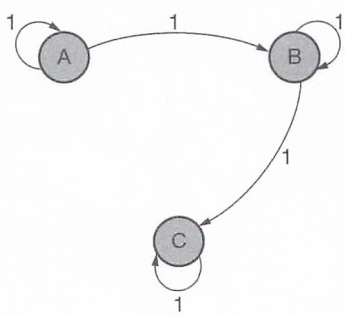
b) (A) a_{ik} mit $k = i - 1$, $i = 2, 3, ..., n$ und a_{1n}

(B) b_{ik} mit $k = i - 1$, $i = 2, 3, ..., n$ und b_{1k} mit $k = 2, 3, ..., n$

c) (A) Käfer mit den Stadien Eier-Larven-Puppen-Käfer. Nachkommen (Eier) werden nur von Käfern produziert.

(B) Mäuse werden nach einem Jahr geschlechtsreif und leben bis zu 4 Jahre. Die Altersstufen E_2 (1–2 Jahre), E_3 (2–3 Jahre) und E_4 (3–4 Jahre) werden unterschieden, da die Fertilitätsraten verschieden sind.

3



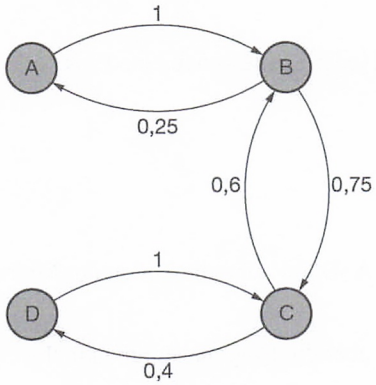
n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	1	1	1	1	1
y_n	1	2	3	4	5	6
z_n	0	1	3	6	10	15

Am Graphen kann man erkennen, dass A immer den Wert 1 behält. Der Wert von B wird jeweils um 1 erhöht, sodass B die natürlichen Zahlen durchläuft. Zu C werden die Werte von B addiert, also enthält C die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:
$x_n = 1$, $y_n = n + 1$ und $z_n = 0{,}5n(n + 1)$.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Mäuselabyrinth (Seite 128)

a)



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Da nach 30 Minuten die ersten Mäuse nach D gelangen, sind in D dann $300 \cdot 1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}4 = 90$ Mäuse zu erwarten.

c)

Zeit (10 min)	0	1	2	3	4	5	6
A	300	0	75	0	52,5	0	50,25
B	0	300	0	210	0	201	0
C	0	0	225	0	247,5	0	249,75
D	0	0	0	90	0	99	0

Beobachtung: Ab der 2. Folgeverteilung gibt es immer zwei Nullen, die abwechselnd in (B) und (D) bzw. (A) und (C) sind.

Begründung: Würde man die Kammern (A) und (C) rot und (B) und (D) blau färben, dann wechseln alle 10 Minuten alle Mäuse die Farbe. Da es zu Beginn nur „rote Mäuse" gibt, findet man in der Folgeverteilung nur „blaue Mäuse" usw.

d) Da die Position der Nullen alterniert, wird die Verteilung nicht stabil.

e) Bereits zur Kontrolle angegeben.

f) (1) Die erste und dritte bzw. zweite und vierte Zeile liefern jeweils äquivalente Gleichungen.
Mit der Gleichung $a + b + c + d = 300$ sind das drei Gleichungen für vier Unbekannte.

(2) Stabile Verteilung: $\vec{v}(d) = \begin{pmatrix} 50 - 0{,}5d \\ 2d \\ 250 - 2{,}5d \\ d \end{pmatrix}$; z. B.: $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$; $\vec{v}(20) = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 200 \\ 20 \end{pmatrix}$

Der Parameter d muss gerade sein und kann die Werte von 0 bis 100 annehmen, also gibt es in diesem Fall 51 stabile Verteilungen.

Dürermatrix (Seite 129)

a) Die Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen ergeben jeweils 34.

b) $(\text{Dürer})^2 = \begin{pmatrix} 341 & 285 & 261 & 269 \\ 261 & 301 & 309 & 285 \\ 285 & 309 & 301 & 261 \\ 269 & 261 & 285 & 341 \end{pmatrix}$ ist kein magisches Quadrat, da die Spalten- und Zeilensummen 1156, aber die Diagonalsummen 1156 und 1284 ergeben.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG
Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

c) Es gilt: $-4A + 8B + 14C - 5D - 1E + 6F + 16G = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$

In jeder der acht Matrizen befinden sich vier Einsen, in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins.

$A + D + E + H = B + C + F + G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot \text{Dürer} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ ist kein magisches Quadrat. In der Matrix $A \cdot \text{Dürer}$ sind die Zeilen der Matrix Dürer vertauscht, sodass Zeilen- und Spaltensummen übereinstimmen, aber die Diagonalsummen nicht.

e) $\text{Dürer} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X$

Fibonacci (Seite 130)

1 a)

Zeiteinheiten	Übertragungsmöglichkeiten	Anzahl der Nachrichten
1	P	1
2	PP; S	2
3	PPP; PS; SP	3
4	PPPP; PPS; PSP; SPP; SS	5
5	PPPPP; PPPS; PPSP; PSPP; SPPP; PSS; SPS; SSP	8
6	PPPPPP; PPPPS; PPPSP; PPSPP; PSPPP; SPPPPP; PPSS; PSPS; PSSP; SPPS; SPSP; SSPP; SSS	13
7	PPPPPPP; PPPPPS; PPPPSP; PPPSPP; PPSPPP; PSPPPP; SPPPPP; PPPSS; PPSPS; PPSSP; PSPPS; PSPSP; PSSPP; SPPPS; SPPSP; SPSPP; SSPPP; PSSS; SPSS; SSPS; SSSP	21

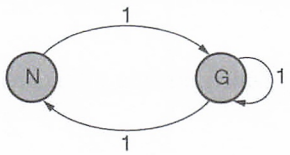
b) $1 = 0 + 1;\ 2 = 1 + 1;\ 3 = 1 + 2;\ 5 = 2 + 3;\ 8 = 5 + 3;\ 13 = 8 + 5$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 55 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ 144 \end{pmatrix}$

d) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\ F^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix};\ F^4 = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$

Jede dieser Potenz-Matrizen enthält drei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen, beginnend mit der größten Fibonacci-Zahl der vorhergehenden Potenz.

2 N: neugeborene Kaninchenpaare; G: gebärfähige Kaninchenpaare



$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Monate	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
G	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Nach 12 Monaten gibt es 233 Kaninchenpaare.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Salatteller (Seite 131)

a) Die einzelnen Zutaten können als Rohstoffe interpretiert werden, die Salatteller als Zwischenprodukte.

Damit ergibt sich die Matrix A: $A = \begin{pmatrix} 75 & 75 & 50 \\ 100 & 50 & 75 \\ 25 & 25 & 0 \\ 0 & 100 & 75 \\ 50 & 0 & 50 \end{pmatrix}$.

Der Vektor mit den Rohstoffen, die verbraucht werden sollen, ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5750 \\ 7000 \\ 1250 \\ t \\ p \end{pmatrix}$, da nur Blattsalat, Gurken und Radieschen aufgebraucht werden sollen.

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 75 & 75 & 50 \\ 100 & 50 & 75 \\ 25 & 25 & 0 \\ 0 & 100 & 75 \\ 50 & 0 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5750 \\ 7000 \\ 1250 \\ t \\ p \end{pmatrix}$ ist für $S_1 = 30$, $S_2 = 20$ und $S_3 = 40$ erfüllt.

Somit können aus den vorhandenen Vorräten 30 Salatteller 1, 20 Salatteller 2 und 40 Salatteller 3 zubereitet werden.

Es gilt: $t = 100 \cdot 20 + 75 \cdot 40 = 5000$; an Tomaten werden 5 kg benötigt.

Es gilt: $p = 50 \cdot 30 + 50 \cdot 40 = 3500$; an Paprika werden 3,5 kg benötigt.

Von den Paprika bleiben 250 g übrig.

b) Die einzelnen Wochentage können als Endprodukte interpretiert werden. Dann ist die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B (nach Vertauschen der Zeilen und Spalten): $B = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 20 & 38 \\ 25 & 18 & 20 & 36 \\ 30 & 37 & 40 & 31 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C ist: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4500 & 5075 & 5000 & 7100 \\ 5000 & 6175 & 6000 & 7925 \\ 1000 & 1075 & 1000 & 1850 \\ 4750 & 4575 & 5000 & 5925 \\ 2250 & 3100 & 3000 & 3450 \end{pmatrix}$.

Diese Werte geben die benötigten Zutaten pro Wochentag an:

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag
Blattsalat	4500	5075	5000	7100
Gurken	5000	6175	6000	7925
Radieschen	1000	1075	1000	1850
Tomaten	4750	4575	5000	5925
Paprika	2250	3100	3000	3450

Alle Angaben in Gramm (g).

Für vier Tage werden 4750 g + 4575 g + 5000 g + 5925 g = 20 250 g = 20,250 kg Tomaten benötigt.
Somit reichen die 20 kg nicht aus.

Verlauf einer Krankheit (Seite 132)

a) $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

b) $M^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2400 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 1800 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 690 \\ 1350 \\ 360 \end{pmatrix}$. Es gibt 690 kranke, 1350 gesunde und 360 genesene Personen.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien

© 2014 Schroedel, Braunschweig

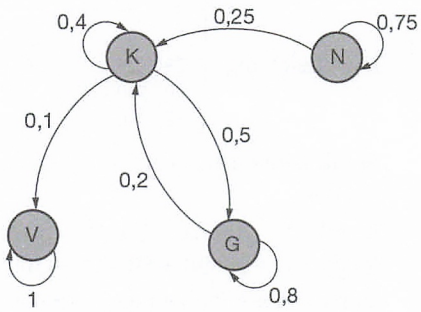
c) (1) Die zweite Zeile gibt die Übergänge zu den noch nicht Erkrankten an. Da Erkrankte bzw. Genesene nicht in diese Gruppe kommen können, stehen an den Übergängen K→N und G→N bei jeder Matrixpotenz Nullen.

(2) 32 % der anfangs nicht Erkrankten sind immer noch gesund. 40 % der anfangs nicht Erkrankten waren zwischendurch erkrankt und sind genesen.

d) (1) Da die Anzahl der Personen aus N gegen Null konvergiert, sind bei einer stabilen Verteilung alle Personen in K oder G und es herrscht ein dynamisches Gleichgewicht. Die 60 %, die von K nach G wandern, entsprechen also den 20 %, die von G nach K wandern:
$0{,}6\,k = 0{,}2\,g \;\wedge\; k + g = 2400 \;\Rightarrow\; k = 600,\; g = 1800.$

(2) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$ führt auf ein LGS mit der Lösung:
$x = 600,\; y = 0,\; z = 1800.$

e) Da es aus der Gruppe der Verstorbenen (V) kein Zurück gibt, werden langfristig alle Personen sterben.



Mitgliederentwicklung im Tennisclub (Seite 133)

a) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 130 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 43 \\ 132 \\ 53 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 43 \\ 132 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23{,}8 \\ 38{,}9 \\ 131{,}7 \\ 55{,}6 \end{pmatrix}$

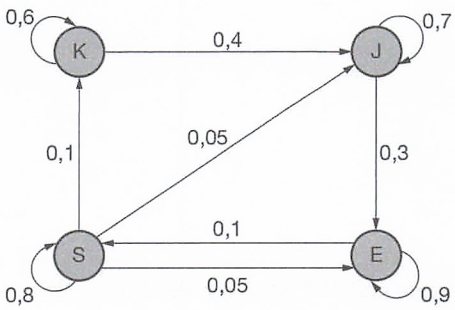
Altersgruppe	(K)	(J)	(E)	(S)
Anzahl nach 1 Jahr	22	43	132	53
Anzahl nach 2 Jahren	24	39	132	55[1)]

[1)] Durch Rundungsfehler würde die Summe 251 ergeben. Deshalb wurde der Wert abgerundet, der am weitesten von der nächst größeren ganzen Zahl entfernt ist.

b) Untersuchung mit hohen Matrixpotenzen: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 130 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 120 \\ 60 \end{pmatrix}$

Mit LGS: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ j \\ e \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ j \\ e \\ s \end{pmatrix} \wedge k + j + e + s = 250 \Rightarrow k = 30,\; j = 40,\; e = 120,\; s = 60$

c)



$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

d) Langfristig: $k = 16\frac{2}{3} \approx 17,\; j = 33\frac{1}{3} \approx 33,\; e = 133\frac{1}{3} \approx 133,\; s = 66\frac{2}{3} \approx 67$

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Insektenpopulation (Seite 134)

a) Aus 30 % der Eier werden Larven und aus 20 % der Larven werden Insekten. Ursachen könnten Fressfeinde und Umwelteinflüsse sein. Im Mittel werden pro Insekt 20 Eier gelegt.

b)

Zeit in Monaten	0	1	2	3	4	5	6
Eier	1000	2000	1200	1200	2400	1440	1440
Larven	300	300	600	360	360	720	432
Insekten	100	60	60	120	72	72	144

c) $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $U^3 = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{pmatrix}$. Die Population wächst zyklisch mit dem Faktor 1,2; bezogen auf drei Monate.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = c = d = e = h = i = 0,\ g = \frac{1}{20},\ b = \frac{10}{3},\ f = 5$

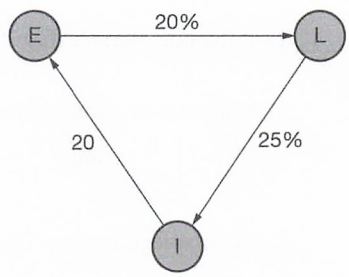
$\Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 50 \end{pmatrix}$

f) E→L: $\frac{576}{2880} = \frac{432}{2160} = \frac{288}{1440} = 0{,}2$

L→I: $\frac{72}{288} = \frac{144}{576} = \frac{108}{432} = 0{,}25$

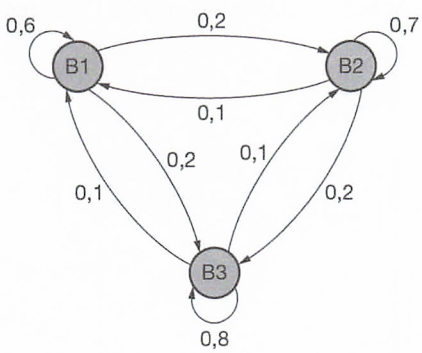
I→E: $\frac{2160}{108} = \frac{1440}{72} = \frac{2880}{144} = 20$

Die Werte wiederholen sich alle drei Monate, weil das Produkt der Übergangswerte Eins ergibt: $0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 20 = 1$.



Bäckereien (Seite 135)

a)



$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

b)

Zeit in Wochen	0	1	2	3	4
Kunden B1	200	160	140	130	125
Kunden B2	100	140	160	170	175
Kunden B3	300	300	300	300	300

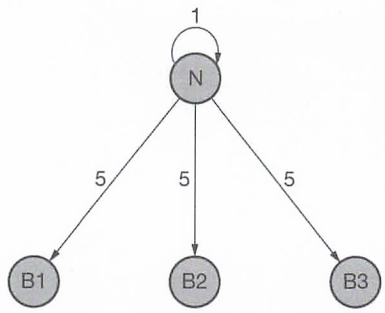
B3 hat die Hälfte aller Kunden und gibt jede Woche 20 %, also 60 Kunden ab. Dazu kommen $0{,}2 \cdot B1 + 0{,}2 \cdot B2 = 0{,}2 \cdot (B1 + B2) = 0{,}2 \cdot 300 = 60$; also gleicht sich der Verlust gerade aus.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

c) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge x + y + z = 600 \Rightarrow x = 120,\ y = 180,\ z = 300$

Langfristig hat B1 120 Kunden, B2 180 Kunden und B3 300 Kunden.

d)



$$N = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeit in Wochen	0	1	2
Kunden B1	200	165	149
Kunden B2	100	145	170
Kunden B3	300	305	311
Neubaugebiet N	1	1	1

Verkettung von Abbildungen (Seite 136)

1 a) Folgende Vorschrift gilt für die Basisvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit gilt: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Nach der Methode aus a) wurden hier die Basisvektoren wie folgt abgebildet:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies entspricht der Spiegelung an der 2. Winkelhalbierenden.

c) Punktspiegelung am Ursprung: $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$L \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = K$

2 a) Streckung entlang der x_1-Achse: $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Streckung entlang der x_2-Achse: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} \end{pmatrix}$

Drehung um den Ursprung: $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

b) $M = C \cdot (B \cdot A) = C \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{18}}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{18}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $\widetilde{M} = B \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

3 a) Den Drehwinkel von –45° kann man aus der Abbildung direkt ablesen.
Der Streckfaktor entlang der x_1-Achse lässt sich durch Vergleich der Abstände der Punkte A und A′ zum Ursprung bestimmen:
$|\overrightarrow{OA}| = 3$ und $|\overrightarrow{OA'}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} = |\overrightarrow{OA}| \cdot \sqrt{2}$. Der Streckfaktor ist somit $\sqrt{2}$.

b) Der Streckfaktor entlang der x_2-Achse lässt sich durch Vergleich der Länge der Kante $|\overrightarrow{AH}| = 3$ zu $|\overrightarrow{A'H'}| = \sqrt{(9-3)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2} = |\overrightarrow{AH}| \cdot 2\sqrt{2}$ bestimmen.
Demnach ist der Streckfaktor $2\sqrt{2}$.

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

Additionstheoreme mit Abbildungsgeometrie (Seite 137)

Eine Drehung um den Winkel α, gefolgt von einer Drehung um den Winkel β ist eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$.

a) $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; $D_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$; $D_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

b) $D_\beta \cdot D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) & -\sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Die Terme an den entsprechenden Positionen der Matrizen müssen gleich sein. Daraus liest man ab:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)$ und $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)$

c) Formeln für $\cos(2\alpha)$ und $\sin(2\alpha)$: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ und $\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

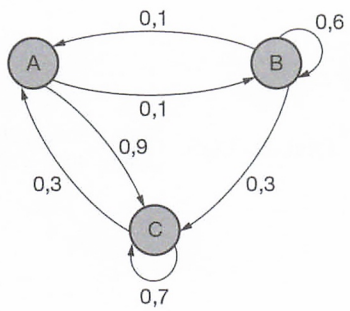
Check up (Seite 138)

1 a) $\begin{pmatrix} 32 & -12 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ c) Nicht möglich, da man nur (m × n)- mit (m × n)-Matrizen addieren kann.

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) Nicht möglich, da man nur (m × n)- mit (n × p)-Matrizen multiplizieren kann. f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ h) Nicht möglich, da $2\cdot 2 - 4\cdot 1 = 0$.

2 a)



b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 150 \\ 450 \\ 1200 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 405 \\ 285 \\ 1110 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 1300 \end{pmatrix}$

3 a) $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ 198 \end{pmatrix}$; stabile Verteilung: $\begin{pmatrix} 75 \\ 225 \end{pmatrix}$

c) M^6 beschreibt die Verteilung im halbjährlichen Rhythmus.

d) $M^{12} = (M^6)^2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}285 & 0{,}238 \\ 0{,}715 & 0{,}762 \end{pmatrix}^2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}251 & 0{,}249 \\ 0{,}749 & 0{,}751 \end{pmatrix}$

4 a) Der Parameter k beschreibt die Fertilitätsrate, d. h. wie viele Eier pro Käfer im Mittel pro Jahr gelegt werden.

b) Es muss gelten: $0{,}4\cdot 0{,}8k = 1$; also $k = \frac{100}{32} = 3{,}125$.

ISBN: 978-3-507-85586-1
Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Kapiteltest (Seite 139, 140)

1 a) (1) $\begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2p & 1-p^2 \\ p^2+1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Die Anzahl der Spalten von A muss mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen. Die Matrix $A \cdot B$ hat dann so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B.

c) Zwei Matrizen lassen sich addieren, wenn sie in der Anzahl der Zeilen und der Anzahl der Spalten übereinstimmen. Die Summe $A + B$ hat die gleiche Form wie A und B.

d) $A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \overset{\text{Add. von Matrizen}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

$\overset{\text{KG in } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} \overset{\text{Add. von Matrizen}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B+A$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

f) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

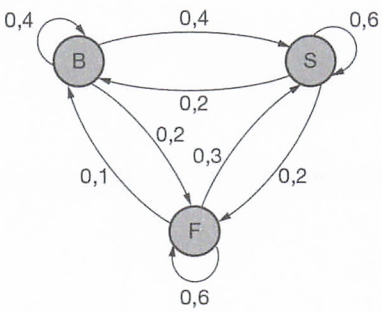
g) M_p ist genau dann nicht invertierbar, wenn $1 \cdot 3 - p \cdot (-2) = 0$, also $p = -1{,}5$.
Oder:
$\begin{pmatrix} 1 & p \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ führt auf das LGS $\left|\begin{matrix} a+pc=1 \\ -2a+3c=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} a+pc=1 \\ 3c+2pc=2 \end{matrix}\right|$ und $c(3+2p)=2$ ist für beliebiges c genau dann nicht lösbar, wenn $p = -1{,}5$.

2 a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

c) Aus $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 320 \end{pmatrix}$ folgt das LGS: $\left|\begin{matrix} 400p+200q=200 \\ 200p+400q=280 \end{matrix}\right|$
mit der Lösung: $p = 0{,}2$ und $q = 0{,}6$. Somit ist: $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

3 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4 a)



$U = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

b)

Zeit	B	F	S
1 Monat	310 Z.	360 Z.	530 Z.
2 Monate	266 Z.	384 Z.	550 Z.

c)

	B	F	S
stabil	250 Z.	400 Z.	550 Z.

d) $U_B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

© 2014 Schroedel, Braunschweig
Übungsmaterialien Neue Wege SII – LA/AG ISBN: 978-3-507-85586-1

e) Geburten- und Sterberate wurden jeweils für die Tiere einer Region angepasst. Im Bergland ist die Anzahl der Ziegen pro Monat um 10 % (Spaltensumme 0,9) gesunken. Hier ist das Überleben bzw. die Fortpflanzung offenbar schwieriger als in der Flussebene und der Steppe, wo die Anzahl der Ziegen pro Monat um 10 % steigt (Spaltensumme 1,1).

f)

t in Monaten	0	1	2	3
N(t)	1200	1220	1290	1373
N(t)/N(t-1)		1,017	1,057	1,064

Da der Wachstumsfaktor deutlich zunimmt, ist ein exponentielles Wachstum kein sinnvolles Modell.

g)

t in Monaten	6	7	8	9	10
N(t)	1661	1771	1888	2012	2145
N(t)/N(t-1)		1,0662	1,0661	1,0657	1,0661

Ein exponentielles Modell scheint nun sinnvoller, da sich der Wachstumsfaktor offenbar bei 1,066 stabilisiert.
Dann ist $N(t) = 1200 \cdot 1{,}066^t$ mit $t \geq 0$.
Genauer wäre allerdings $N^*(t) = 1661 \cdot 1{,}066^{t-6}$ mit $t \geq 6$.

h) $N(12) \approx 2584$; $N^*(12) \approx 2437$
(Der mit der Prozessmatrix U′ berechnete Wert beträgt ebenfalls 2437 Ziegen.)

i) $1200 \cdot 1{,}066^t = 3000 \Rightarrow t = 14{,}33$; $1661 \cdot 1{,}066^{t-6} = 3000 \Rightarrow t = 15{,}25$
Nach diesem Modell erreicht die Gesamtanzahl der Ziegen nach ca. 14 Monaten und 10 Tagen bzw. nach ca. 15 Monaten und 8 Tagen den Wert 3000.

ISBN: 978-3-507-85586-1 Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien
© 2014 Schroedel, Braunschweig

Entschlüsselungstabelle Grundwissen

1	ab
2	ac
3	ad
4	ae
5	af
6	ag
7	ah
8	ai
9	bj
10	ba

11	bb
12	bc
13	bd
14	be
15	bf
16	bg
17	bh
18	bi
19	cj
20	ca

21	cb
22	cc
23	cd
24	ce
25	cf
26	cg
27	ch
28	ci
29	dj
30	da

31	db
32	dc
33	dd
34	de
35	df
36	dg
37	dh
38	di
39	ej
40	ea

41	eb
42	ec
43	ed
44	ee
45	ef
46	eg
47	eh
48	ei
49	fj
50	fa

51	fb
52	fc
53	fd
54	fe
55	ff
56	fg
57	fh
58	fi
59	gj
60	ga

61	gb
62	gc
63	gd
64	ge
65	gf
66	gg
67	gh
68	gi
69	hj
70	ha

71	hb
72	hc
73	hd
74	he
75	hf
76	hg
77	hh
78	hi
79	ij
80	ia

81	ib
82	ic
83	id
84	ie
85	if
86	ig
87	ih
88	ii
89	kj
90	ka

91	kb
92	kc
93	kd
94	ke
95	kf
96	kg

Fotoverzeichnis

Umschlag: fotolia.com, New York (euregio photo); 12.1: Shutterstock.com, New York (ra2studio); 33.1: Ji Lee, New York; 57.1: fotolia.com, New York (SeanPavonePhoto); 82.1: Hillenkötter & Ronsieck Beteiligungs GmbH, Bielefeld; 83.1: Thomas Vogt, Hargesheim; 90.1: fotolia.com, New York (Grinaldi); 100.1: blickwinkel, Witten (G. Czepluch); 100.2: fotolia.com, New York (MAST); 101.1: Your Photo Today – A1 Pix, Taufkirchen; 106.1: fotolia.com, New York (Michael Höfner); 121.1: fotolia.com, New York (Monkey Business); 129.1: akg-images, Berlin; 131.1: fotolia.com, New York (juniart); 135.1: fotolia.com, New York (ikonoklast_hh); 141.1: fotolia.com, New York (Lucky Dragon).

Es war nicht in allen Fällen möglich, die Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und um Abdruckgenehmigung zu bitten. Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Konditionen abgegolten.

Neue Wege SII – LA/AG Übungsmaterialien ISBN: 978-3-507-85586-1

© 2014 Schroedel, Braunschweig